TREBALL DE RECERCA

L'ELASTICITAT
DELS MATERIALS

AUTOR

SERGI ARNAU i ALMIRALL

Dirigit per Javier de la Torre

2n de Batxillerat, F
Escola Pia de Terrassa

Terrassa, 7 de gener de 2004

Dedico aquest treball al meu pare i a la meva mare.

Aquest treball no hauria estat possible sense el suport i el consell del meu avi Fernando i el meu oncle Quico en ajudar-me en la construcció del model físic i, de l'assessorament d'en Roger Mallola en la recerca del tema objecte d'investigació i en els aspectes del treball escrit, especialment la redacció del text.

Sergi Arnau i Almirall

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

La idea del treball que es presenta gira al voltant del concepte de l'elasticitat dels materials. L'elasticitat és una propietat dels sòlids (i líquids) associada a la deformació de les seves parts sota diferents tipus de forces. Aquesta propietat quasi sempre inapreciable, té una importància vital en les nostres vides, i si no fos per aquest treball, jo seria com una d'aquestes persones que ignoren que l'elasticitat és un concepte molt important en les coses del dia a dia. La hipòtesi de partida de l'elasticitat dels cossos és senzilla i clara. Un cos es deforma per acció de les forces, però, com més força s'apliqui a un cos, mes gran serà la seva deformació. A més a més, m'he adonat profundament que en el fons tots els materials, per petita que sigui la seva deformació sota l'efecte d'una força, tenen una certa elasticitat: quan jo trepitjo el terra o intento doblegar una barra de ferro, tant en el terra, com en la barra de ferro, hi ha una deformació encara que sigui inapreciable. Aquest ha sigut el meu aprenentatge. De fet, aquest fenomen de l'elasticitat és d'una gran importància en molts camps de la societat, i per descomptat en el de l'enginyeria industrial, de la enginyeria civil i de l'arquitectura, ja que gràcies al coneixement de la deformació i de la resistència que pot dissenyar una estructura o peça, es pot saber com han de ser les mides dels seus elements, siguin aquests les bigues d'un edifici o les argolles d'un mecanisme d'una maquina industrial. Així, per exemple, un bon estudi sobre fins a quin punt una biga pot aguantar una determinada carrega sense que pateixi cap trencament és fonamental per assegurar una bona construcció.

En aquest treball es poden observar dues parts ben diferenciades: la primera és de caire bàsicament teòric i es on s'expliquen els conceptes bàsic per entendre aquest treball. Pel que fa la segona part es tracta de posar a la practica els conceptes abans estudiats. El treball es divideix en sis capítols. El primer presenta els principis generals de la mecànica. El segon introdueix els fonaments de l'estàtica. El tercer presenta el concepte d'esforç. El quart fa referència a la deformació dels cossos. El cinquè exposa la relació teòrica entre els esforços i les deformacions. El sisè presenta el model experimental. El treball finalitza amb unes conclusions i un annex que presenta els càlculs intermitjos.

La part experimental es desenvoluparà fent un estudi de les propietats mecàniques bàsiques de les molles mitjançant un aparell dissenyat i fabricat per a l'efecte. El model experimental consisteix en un aparell amb una massa i un ressort, que van canviant de posició i de longitud, i que estan units una corda tensora i per una palanca que gira al voltant d'un passador que està exempt de fregament i situat un el recolzament adequat. El ressort no està deformat quan ?, l'angle de mesura, és nul. La base empírica d'aquest model consisteix a relacionar els valors de k i els valors de ?, és a dir, relacionar un paràmetre associat a l'esforç i un altre a la deformació. Cal mencionar que l'experimentació s'ha realitzat amb molles precisament perquè el grau de dificultat per calcular la deformació d'una molla és relativament fàcil. En canvi, per exemple, el càlcul de la deformació d'una goma d'esborrar, d'un plàstic o una peça compacte d'acer requeriria un nivell molt superior d'estudi. Les molles, però, donen uns resultats que son fàcilment observables i són molt il·lustratius.

Els problemes que s'han presentat han estat de dos tipus. El primer es relaciona amb la part teòrica, ja que els conceptes estudiats ja son de nivell universitari i he tingut que utilitzar manuals generals d'un nivell que no l'assolim en el batxillerat. El segon problema ha estat el disseny del prototipus. Per poder realitzar-lo he necessitat de l'ajuda de la meva mare en el disseny, que ha estat fet amb un programa de disseny per ordinador, i de l'ajuda del meu avi i del meu oncle en la construcció, ja que s'ha hagut de fer per una empresa especialitzada en materials metàl·lics. D'altra banda, per acabar de completar el disseny i les parts del mateix prototipus he utilitzat diversos elements i peces que es poden trobar en qualsevol ferreteria, com cordes, ganxos, etc.

La bibliografia esta composada de manuals dels primers cursos dels estudis d'enginyeria. No se n'han fet servir molts, perquè tots presenten bàsicament la mateixa teoria.

1. PRINCIPIS GENERALS

La mecànica és la branca de la física que estudia la reacció dels cossos sota la influència de les forces. La matèria d'aquest camp constitueix gran part del nostre coneixement de les lleis que regeixen el comportament dels gasos, dels líquids i dels cossos sòlids. Les lleis de la mecànica tenen aplicació a l'astronomia i a la física, i també tenen una aplicació en l'estudi de les màquines i les estructures pròpies de l'enginyeria. Per conveniència, l'estudi de la mecànica es divideix en tres parts: la mecànica dels cossos rígids, la mecànica dels cossos deformables i la mecànica dels fluids.

L'estudi de la mecànica dels cossos rígids es subdivideix en tres seccions principals: l'estàtica, la cinemàtica i la cinètica. L'estàtica estudia els cossos sota la influencia de forces equilibrades, és a dir, cossos que estan en repòs o en moviment rectilini uniforme. En aquestes circumstàncies es pot afirmar que els cossos es troben en repòs. L'estàtica constitueix una part important de l'estudi de la mecànica, ja que proporciona mètodes per a la determinació, per exemple, de les reaccions en els recolzaments de les estructures, o les reaccions entre les distribucions de forces internes i les carregues exteriors de les estructures. L'estudi de la relació entre la distribució de forces interiors i carregues exteriors que es desenvolupa mitjançant l'estàtica, realitza un paper important en el posterior desenvolupament de la mecànica de cossos deformables.

La cinemàtica estudia el moviment dels cossos sense considerar la causa que origina aquest moviment. La cinemàtica, també anomenada geometria del moviment, forma una part important de l'estudi de la mecànica, no només a causa de la seva aplicació en problemes on intervenen forces, sinó també per la seva aplicació en problemes on només hi intervenen moviments de parts d'una maquina. En molts problemes de moviment, l'ús dels principis de la cinemàtica son suficients, per si mateixos, per resoldre'ls.

La cinètica representa l'estudi dels cossos sotmesos a forces que no estan en equilibri; és a dir, que tenen un moviment no uniforme, que és el mateix que dir accelerat. L'estudi de la cinètica forma una part important de l'estudi de la mecànica perquè ens proporciona relacions entre el moviment d'un cos i les forces que actuen sobre aquest. Las relacions de la cinètica s'obtenen mitjançant l'aplicació directe de les lleis de Newton del moviment, o bé, utilitzant les formes integrades de las equacions del moviment que donen lloc als principis del treball i l'energia, de l'impuls i quantitat de moviment o del teorema del moment cinètic. En la literatura tècnica és freqüent utilitzar l'expressió *dinàmica* per referir-se a la subdivisió de la mecànica que s'associa més estretament al concepte de moviment.

La branca de la mecànica que estudia la distribució de forces internes i les deformacions que tenen lloc en les estructures de l'enginyeria real i en els components de la maquinaria quan estan sotmesos a sistemes de forces, es coneix amb el nom de mecànica de cossos deformables. Els llibres que tracten sobre aquesta part de la mecànica tenen noms com "mecànica de materials" o " mecànica de cossos deformables".

La branca de la mecànica estudia els líquids i gasos en repòs o en moviment s'anomena mecànica de fluids. Els fluids es poden classificar en compressibles o incompressibles. Es diu que un fluid és compressible quan la seva densitat varia amb la temperatura i amb la pressió. Si el volum del fluid es manté constant durant un canvi de pressió, llavors es tracta d'un fluid incompressible. En la majoria de les aplicacions tècniques, els líquids es consideren incompressibles. La part de la mecànica de fluids que tracta dels sobre fluids incompressibles sovint rep el nom d'Hidràulica.

1.1- ANTECEDENTS HISTÒRICS

Segons ens diu la historia, la primera part de la Mecànica que es va desenvolupar fou l'Estàtica , donat que molts dels seus principis son necessaris per construir edificis. Els antics monuments egipcis i assiris contenen representacions pictòriques de molts tipus d'utensilis mecànics. Els constructors de les piràmides probablement van comprendre i utilitzar mitjans com la palanca, el narri o el pla inclinat.

Archytas de Tarento (400 a.C.) proposà la teoria de les politges. Els escrits d'Arquimedes (287-212 a.C.) demostren que ell comprengué les condicions d'equilibri d'una palanca i el principi de la flotació. Leonardo da Vinci (1452-1519) va afegir als estudis d'Arquimedes sobre les palanques el concepte de moment i el va aplicar en l'equilibri dels cossos rígids. Copèrnic (1473-1543) va proposar que la Terra i la resta dels planetes del sistema solar giraven al voltant del sol. Des dels temps de Ptolomeu (s.II a.C) es creia que era la Terra la que se situava al centre de l'Univers. Stevin (1548-1620) va ser el primer en descriure el comportament d'un cos en un pla inclinat llis i utilitzà la llei del paral·lelogram d'addició de forces. Pel que sembla, tan Stevin com Galileu (1564-1642) van entendre el principi del desplaçament virtual -treballs virtuals-, encara que va ser Jean Bernoulli (1667-1748) qui va percebre la seva aplicació a tots els casos d'equilibri.

La part de la mecànica anomenada dinàmica es va desenvolupar molt més endavant ja que la determinació de la velocitat i de l'acceleració necessiten unes mesures precises del temps. Galileu va experimentar amb blocs situats sobre plans inclinats, pèndols i cossos en caiguda lliure. Tanmateix es va trobar amb la dificultat de mesurar els petits intervals de temps que requerien els seus experiments. Huygens (1629-1695) va continuar els treballs de Galileu amb pèndols i va inventar el rellotge de pèndol. També va realitzar una determinació precisa de l'acceleració de la gravetat. A Isaac Newton (1642-1721) se li atribueix els fonaments de la mecànica amb el seu descobriment de la gravitació universal i amb la formulació de les lleis del moviment. El treball que Newton va realitzar amb el punt material, basat en la geometria, fou ampliat per Euler (1707-1793) als sistemes del cossos rígids. Les contribucions més recents a la mecànica són la formulació de la teoria de la mecànica quàntica de Max Planck (1858-1957), i la formulació de la teoria de la relativitat (1905) per part d'Albert Einstein (1879-1955). Aquestes dues ultimes teories no rebutgen la mecànica de Newton, sinó que son més generals.

1.2- MAGNITUDS FONAMENTALS DE LA MECÀNICA

Les magnituds fonamentals de la mecànica son l'*espai*, el *temps*, la *massa* i la *força*. Tres d'elles –espai, temps i massa- son magnituds absolutes[1]. La magnitud *força* no és independent de les altres tres, sinó que està relacionada amb la massa del cos i de com varia la velocitat del cos respecte del temps.

L'espai és la regió geomètrica on tenen lloc els fets físics d'interès per a la mecànica. Aquesta regió s'estén infinitament en totes direccions. La mesura que s'utilitza per descriure la mida d'un sistema físic rep el nom de longitud. La posició d'un punt en l'espai es pot determinar a traves d'un sistema de referència (eixos de referència) mitjançant mesures lineals i angulars. El sistema de referència bàsic, que s'utilitza com a suport en la resolució de problemes de la mecànica, es considera fix a l'espai. Les mesures relatives d'aquest sistema son considerades com absolutes.

[1] Magnituds absolutes: magnituds independents entre sí i que no es poden expressar en funció d'altres magnituds o de reduir a conceptes o formes més senzilles.

Els temps es pot definir com l'interval que passa entre dos fets. Les mesures d'aquest interval s'efectuen mitjançant comparacions amb algun fet reproduïble, tal com el temps que tarda la Terra en donar una volta a l'entorn del sol, o el temps que tarda en donar una volta sobre el seu eix. El temps solar és el temps de rotació de la Terra mesurat respecte del sol i s'utilitza per a la navegació terrestre i per a fins de la vida quotidiana.

Tot aparell utilitzat per mesurar el pas del temps rep el nom de rellotge. Dels fets reproduïbles que s'utilitzen normalment, es pot citar l'oscil·lació d'un pèndol, l'oscil·lació d'una molla espiral i un volant regulador i l'oscil·lació d'un cristall piezoelectric. El temps que tarda cadascun d'aquests dispositius en realitzar un cicle de moviment s'anomena període. La freqüència del moviment és el nombre de cicles que es realitzen en unitat de temps.

S'anomena matèria a tota substància que ocupa espai. Un cos és matèria limitada per una superfície tancada. La propietat d'un cos que fa que aquest resisteixi qualsevol canvi de moviment, rep el nom d'inèrcia. La resistència que oposa un cos a qualsevol variació del seu moviment de translació és independent de la forma i volum del cos; només depèn de la seva massa. La resistència que un cos oposa a la variació del seu moviment de rotació depèn de com estigui distribuïda la massa del cos. La massa és també una forma de mesurar l'atracció entre dos cossos.

La força es pot definir com l'acció d'un cos sobre un altre cos. El concepte de força prové principalment de la nostra experiència personal, on cadascú de nosaltres som cossos autònoms, i veiem com els muscles es contrauen quan intentem empènyer un segon cos, o bé tirar d'ell. Això és un exemple de forces resultants entre el contacte directe entre dos cossos. Les forces també es poden produir entres cossos separats físicament. Les forces gravitatòries que exerceixen la Terra sobre la lluna i els altres satèl·lits artificials, per mantenir-los en òrbita, són exemples clars de forces a distància. Com que un cos no pot provocar una força sobre un altre cos a menys que oposi resistència, una força mai existiria sola. La força sempre es produeix per parelles i ambdues forces tindran el mateix mòdul i direcció però seran de sentit contrari. Malgrat que una força mai no existeix sola, en l'estudi del moviment dels cossos convé tenir en compte només l'acció d'altres cossos sobre un primer determinat, sense tenir en compte la reacció d'aquest primer sobre els segons. L'efecte exterior d'una força sobre un cos és o la acceleració, o l'aparició de forces resistents (reaccions) contra ell.

Un punt material té massa però ni volum ni forma. Quan, en un problema de mecànica, podem fer treballar un cos com un punt material (gran o petit) el problema se simplifica molt, donat que es considera que la massa es concentra en un punt, i conseqüentment, en la solució del problema no intervindrà el concepte de rotació.

Un cos rígid es pot representar per un conjunt de punts materials; el volum i la forma del cos es manté constant en tot moment i en totes les condicions de carrega. El concepte de cos rígid representa una idealització de la situació real, ja que tots els cossos reals canvien la seva forma, fins a cert punt, quan es troben sotmesos a un sistema de forces. Aquesta deformació és petita en la majoria dels components de la maquinaria i dels elements estructurals que es troben en la realitat. Conseqüentment, aquestes deformacions tindran una efecte insignificant sobre l'acceleració i sobre les reaccions dels cossos rígids ideals.

1.2.1- Lleis de Newton

L'estudi de la mecànica tècnica es fonamenta en les lleis que va proposar el 1687 Isaac Newton. En un tractat anomenat *Principia*, Newton va establir las lleis fonamentals que determinen el moviment d'un punt material de la forma següent[2]:

Primera llei: Tot cos es manté en el seu estat de repòs o de moviment uniforme, si no es veu forçat a canviar aquest estat per forces aplicades.

Segona llei: La variació del moviment és proporcional a la força motriu aplicada, amb la direcció de la força aplicada.

Tercera llei: La reacció és sempre igual i oposada a l'acció; és a dir, les accions entre dos cossos son iguals i directament oposades.

Aquestes lleis, conegudes amb el nom de "lleis de newton del moviment" es coneixen avui en dia de la forma següent:

Primera llei: Sense forces exteriors, un punt que estigues inicialment en repòs o amb velocitat constant, seguiria en repòs o amb velocitat constant en línia recta.

[2] Segons indica el Dr. Ernst Mach, en el llibre The Science of Mechanics. Veure Riley, W. et Sturges, L. (1995). **Ingenieria Mecánica. Estatica**. Barcelona: Editorial Reverté.

Segona llei: Si sobre un punt material s'exerceix una força exterior, aquest punt s'accelerarà amb la direcció i sentit de la força, i el mòdul de l'acceleració serà directament proporcional a la força i inversament proporcional a la massa del punt.

Tercera llei: La reacció és sempre igual i oposada a l'acció; és a dir, les accions que s'exerceixen dos cossos son sempre iguals i directament oposades.

Las tres lleis de newton es van desenvolupar a partir d'un estudi del moviment planetari (moviment de punts materials); conseqüentment, només son aplicables a un punt material. Durant el segle XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) va ampliar el treball de Newton sobre punts materials per a casos de sistemes de cossos rígids.

La primera llei del moviment constitueix un cas particular de la segona, que considera alhora el cas en que el punt està en equilibri. Per tant, la primera llei no és la base de l'estudi de l'estàtica. La segona llei del moviment ens dona la base de l'estudi de la dinàmica. L'expressió matemàtica de la segona llei, que tant s'utilitza en la dinàmica, és:

$$F = m \cdot a$$ **Equació 1**

on
F: és la força exterior que s'aplica al punt
m: és la massa del punt
a: és l'acceleració que agafa el punt

La tercera llei del moviment dóna la base per comprendre el concepte de força donat que, en les aplicacions practiques, la paraula "acció" significa força. Així doncs, si un cos exerceix una força sobre un altre, aquest exerceix sobre el primer una força igual i oposada.

La llei que regeix l'atracció mútua entre dos cossos aïllats també la va formular Newton i es coneix amb el nom de "llei de la gravitació". Aquesta llei es pot expressar matemàticament de la següent forma:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \textbf{Equació 2}$$

on

F: es el mòdul de la força mútua d'atracció entre dos cossos.

G: es la constant de gravitació universal

$m_{1:}$ es la massa d'un dels cossos.

$m_{2:}$ es la massa de l'altre cos.

r: es la distancia entre els centres de massa dels dos cossos.

El valor aproximat de la constant de gravitació universal, adequat per a la majoria de càlculs tècnics, és:

$G= 6{,}679\ (10^{-11})\ m^3/\ (kg \cdot s^2)$ en el SI d'unitats

La força mútua d'atracció entre dos cossos representa l'acció d'un cos sobre un altre; per tant, obeeix a la tercera llei de Newton exigint que tinguin igual mòdul, la mateixa recta suport (estiguin sobre la recte que uneix els dos centres de massa) i tinguin sentit oposat. La llei de la gravitació universal es mol important amb tots els estudis referents al moviment de planetes o de satèl·lits artificials.

1.2.2- Massa i pes

La massa *m* d'un cos és una magnitud absoluta que no depèn de la posició del cos ni d'allò que l'envolta. El pes W d'un cos és l'atracció gravitatòria que exerceix sobre ell la terra o qualsevol altre cos massiu com la lluna. Conseqüentment, el pes d'un cos depèn de la posició del primer respecta al segon cos. Així, segons l'equació 2, en la superfície terrestre:

$$F = G \frac{m_e \cdot m}{r_e^2} = m{\cdot}g \qquad \textbf{Equació 3}$$

on

$m_{e:}$ es la massa de la terra

$r_{e:}$ es radi de la terra

$g = Gm_e / r_e^2$ es l'acceleració de la gravetat.

El valor aproximat de l'acceleració de la gravetat, adequats per a la majoria de càlculs tècnics és

$$g = 9{,}807 \text{ m/s}^2$$

En el sistema internacional de mesura (SI) s'utilitza el Newton (N) com unitat de força i el quilogram (Kg) com unitat de massa.

1.3- UNITATS DE MESURA

Els fonaments mes bàsics de la Mecànica son las magnituds físiques utilitzades per expressar les lleis. Entre d'altres poden citar magnituds com la massa, la longitud, la força, el temps, la velocitat i l'acceleració. Les magnituds físiques les podem dividir en fonamentals i derivades. Las magnituds fonamentals no es poden definir en funció d'altres magnituds. Exemples de magnituds que es consideren fonamentals en la mecànica són la longitud i el temps. Les magnituds derivades son aquelles que es basen amb mesures d'altres magnituds físiques. Exemples de magnituds derivades en mecànica es l'àrea d'una superfície, el volum, la velocitat i l'acceleració. Algunes magnituds es poden considerar fonamentals i derivades alhora. Exemples d'aquest tipus de magnituds físiques són la massa i la força. En el sistema internacional (SI) d'unitats, la massa es considera magnitud fonamental i la força magnitud derivada.

El valor de cada magnitud fonamental es defineix a partir d'una unitat o "patró" elegit arbitràriament. Per a la longitud es va adoptar el 1961 un patró atòmic. Es va elegir la longitud d'ona al vuit del raig vermell-taronja del espectre de l'isòtop kripto 86. Avui dia, un metre es defineix com 1.650.763,73 longituds dona d'aquest raig de llum.

El temps es pot mesurar de varies formes. La unitat de temps universalment acceptada, el segon (s), s'ha definit al llarg de la historia de diverses maneres. Com a patró mes precís s'utilitza un patró atòmic, basant-se amb les vibracions atòmiques periòdiques de l'isòtop cesi 133. La definició de segon és la durada de 9.192.631.770 cicles de vibració de l'isòtop cesi 133. Un rellotge de cesi no cometria un error de més d'un segon després de funcionar durant 3.000 anys.

La unitat de massa, el quilogram (Kg) està definit per un cilindre de platí (el Kg patró) que es conserva a l'Oficina Internacional de pesos i mesures a Sèvres, França.

1.3.1- Sistema Internacional d'Unitats (SI)

El sistema que la comunitat científica internacional ha adoptat o està en camí d'adoptar és el sistema internacional d'unitats SI. Aquest sistema proporcionava, des d'un inici, un conjunt d'unitats de mesura de la longitud, la superfície, el volum, la capacitat i la massa basada en dues unitats fonamentals: el metre i el quilogram. En afegir-se una unitat de temps, les mesures pràctiques començaren a basar-se en el sistema d'unitats metre-quilogram-segon (MQS). L'any 1960, la XI Conferència General de Pesos i Mesures va adoptar formalment el Sistema Internacional d'Unitats, l'abreviatura del qual en tots els idiomes és SI.

1.4- MÈTODE DE RESOLUCIÓ DELS PROBLEMES

Els principis de la mecànica son pocs i relativament senzills. En canvi, les seves aplicacions son infinites, tant en varietat i complexitat. En l'enginyeria mecànica, l'èxit depèn en bona part de seguir un mètode disciplinat a l'hora de resoldre el problema. La resolució de problemes professionals consta de tres fases: definició i identificació del problema, desenvolupament i simplificació del model i, solució matemàtica i interpretació dels resultats.

Els problemes de la Mecànica tècnica (Estàtica, Dinàmica i Mecànica de cossos deformables) tracten dels efectes exteriors d'un sistema de forces aplicades sobre un cos físic. El mètode que se sol seguir per resoldre un problema de mecànica tècnica exigeix identificar totes les forces exteriors que s'apliquen en el "cos d'estudi". Un dibuix adequadament preparat, que mostri el "cos d'estudi" aïllat de tots els altres cossos que interactuen i que inclogui també totes les forces aplicades sobre aquest cos, s'anomena diagrama de sòlid lliure (DSL).

Com que les relacions entre forces exteriors que s'apliquen a un cos i els moviments o deformacions que es produeixen el cos s'expressa en forma matemàtica, la situació física real haurà de representar-se mitjançant un model matemàtic per obtenir el resultat buscat. Moltes vegades, a l'hora d'establir aquest model, serà necessari formular hipòtesis o aproximacions que simplifiquin la solució. Les aproximacions més normals en els problema d'estàtica i dinàmica, consisteixen a tractar la majoria dels sòlids com si fossin rígids. Cap cos real és absolutament rígid; tanmateix, les variacions de forma d'un cos real acostumen a tenir una variació inapreciable en l'acceleració originada per un sistema de forces o en les reaccions que mantenen un cos en equilibri.

En general, un problema físic real no es pot resoldre de manera exacta o completament precisa. La idea més important en la resolució de problemes pràctics és la que fa referència a la necessitat de màxima simplificació conceptual per arribar a la solució o objectiu desitjat. No obstant això, inclosos els casos més complicats, amb un model simplificat es poden obtenir bons resultats qualitatius. La interpretació adequada d'aquests resultats ens porta a fer prediccions aproximades del comportament físic o a comprovar la certesa dels resultats analítics, numèrics o experimentals més elaborats. L'enginyer ha de ser sempre conscient del problema físic real que tracta, i de les limitacions associades al model matemàtic que utilitza. Ha d'avaluar contínuament les hipòtesis formulades per assegurar-se que el sistema matemàtic proporciona una representació adequada del procés físic estudiat o del dispositiu pràctic utilitzat.

El plantejament d'un problema s'ha de reduir a la forma més simplificada. En el cas d'aquest treball, es presenten uns capítols teòrics suficientment il·lustratius per emmarcar el tema d'estudi, però alhora s'intenta desenvolupar un model pràctic prou senzill per al nivell exigit i la formació rebuda fins a dia d'avui per l'autor, tot facilitant una expressió del document clara, lògica i neta. Això es pot aconseguir seguint els passos que se citen a continuació:

1.- Llegir el problema atentament.
2.- Identificar la qüestió, el que hem de resoldre.
3.- Identificar els principis (formules, equacions...) necessàries per obtenir la solució.
4.- Preparar un croquis a escala i col·locar-hi la informació que sens proporciona.
5.- Dibuixar els diagrames de sòlids lliures corresponents.
6.- Aplicar els principis, equacions, lleis, etc.
7.- Donar els resultats amb el numero de xifres significatives adequades i les unitats adequades.

8.- Estudiar els resultats i comprovar si son coherents.

Saber aplicar un bon mètode per resoldre un problema és molt important per obtenir èxit en els resultats i constitueix una part molt important de l'educació tècnica. De més a més, les fases d'identificació del problema, simplificació del model i interpretació dels resultats són, moltes vegades, més importants que no pas la resolució matemàtica pròpia.

1.5- SIGNIFICACIÓ DELS RESULTATS NUMÈRICS

Un dels aspectes més importants en qualsevol treball empíric és la presentació dels resultats i la seva valoració tècnica, és a dir, pràctica. El enginyers i els tècnics competents exposen que no s'han d'exposar els resultats finals amb més exactitud que la que sigui justificada per les dades i, no es poden arrodonir els números de forma excessiva ni abans de temps. Malgrat els resultats hauran de mostrar-se sempre amb la major precisió possible, la resposta definitiva no podrà ser més precisa que les dades que la van generar. Una de les activitats en tot treball d'enginyeria és determinar la precisió de les dades de referència i la precisió esperada de la resposta final. Els resultats sempre hauran de reflectir la precisió de les dades inicials donades. Resumint-ho, per poder obtenir amb precisió els resultats d'un problema tècnic real haig de tenir en compte tres factors: 1) Precisió de les dades físiques ja conegudes; 2) Precisió del model físic; i 3) Precisió amb els càlculs efectuats. En el cas concret del model experimental d'aquesta treball, s'ha considerat convenient donar com a màxim tres o quatre xifres significatives.

2. FONAMENTS D'ESTÀTICA

L'objectiu principal d'aquest treball és permetre d'entendre les relacions entre les càrregues aplicades a un cos no rígid i les forces internes desenvolupades i les deformacions induïdes en el cos d'un element. Sempre des de l'època de Galileu (1564-1642), els científics i els enginyers han estudiat el problema de la capacitat de resistència (càrrega) de les peces estructurals i dels components de les màquines, i han desenvolupat mètodes matemàtics i experimentals d'anàlisi per poder determinar aquestes forces internes i les deformacions sofertes per l'aplicació de càrregues. Les experiències i les observacions d'aquests científics i enginyers dels darrers tres-cents anys son l'herència rebuda per l'enginyer contemporani. El coneixement fonamental adquirit en els darrers segles, juntament amb les teories i tècniques d'anàlisi, permeten a l'enginyer modern dissenyar, amb competència i seguretat gairebé completes, estructures i màquines de mida i complexitat sense precedents.

Amb aquest treball es pretén presentar una petita i senzilla mostra de com es poden resoldre els grans problemes que el tècnic modern ha d'afrontar. La teoria que es presenta i desenvolupa en les següents pàgines conforma el marc conceptual per entendre els sistemes estructurals i per resoldre els problemes pràctics d'infrastructura i tècnica que tota societat genera. En general, les preguntes que poden aparèixer al voltant de la temàtica del treball poden ser dels tipus següents: de quins materials han de construir-se les màquines o les estructures per a tal funció, i quines han de ser les proporcions i les seves mides? Sofrirà aquest element o aquest altre una deformació acceptable per incorporar-lo a aquella estructura? Pot aquesta estructura, que va ser dissenyada per a una funció determinada a, ser utilitzada per a una funció b no preestablerta?[3] Totes aquestes preguntes només poden respondre's a partir de l'anàlisi estructural mitjançant les fórmules que aporten la mecànica i l'estàtica, que se sustenten en les matemàtiques i en la formulació de conceptes del camp de la teoria de l'elasticitat i dels materials. Les equacions d'equilibri que provenen de l'estàtica s'usen àmpliament i de fet són la base per entendre el model experimental del treball.

[3] Hi ha certes pel·lícules que il·lustren que aquestes preguntes se les fa l'enginyer modern. En una de les trames de la pel·lícula Apol·lo 13, el director d'operacions no demana per quina funció va ser dissenyat el coet sinó allò que el coet podia fer.

2.1- CLASSIFICACIÓ DE LES FORCES

La força és un dels conceptes bàsics més importants en l'estudi de la mecànica dels materials o mecànica dels cossos deformables. La força és l'acció d'un cos sobre un altre; les forces sempre existeixen a parells d'igual magnitud i sentit oposat. Les forces poden resultar d'un contacte físic directe entre dos cossos, o per una influència a distància. Per exemple, consideri's un gerro damunt una taula. El gerro exerceix una força sobre la taula a través d'un contacte directe entre la seva base i la superfície de la taula; aquesta, alhora exerceix una força d'igual magnitud i sentit oposat sobre la base del gerro. Si el gerro s'elevés per acció d'una força externa, la força de contacte desapareixeria, i tanmateix, encara romandria una atracció gravitacional, un tipus de força entre dos cossos que no estan en contacte directe, entre el gerro i la terra. La força d'atracció gravitacional exercida sobre el gerro per la Terra rep el nom de pes del gerro; una força d'igual magnitud i sentit oposat es exercida pel gerro sobre la Terra. Un altra tipus de força que existeix sense un contacte físic directe és la força electromagnètica.

Les forces de contacte s'anomenen forces de *superfície*, ja que existeixen en les superfícies de contacte entre dos cossos. Si l'àrea de contacte es petita comparada amb la mida del cos, la força rep el nom de força *concentrada*; se suposa que aquest tipus de força actua en un punt. Un exemple és la força que aplica la roda d'un cotxe al paviment d'una carretera. Aquesta força es modela com una força concentrada. Una força de contacte també pot estar distribuïda sobre una regió estreta, d'una forma uniforme o no uniforme. Aquesta situació és la que existeix quan la coberta d'un edifici entra en contacte amb una bigueta del pis superior. En aquest cas, la coberta de l'edifici exerceix una càrrega distribuïda, una força sobre la bigueta. La intensitat de la càrrega distribuïda s'identifica amb w i té dimensions de força per unitat de longitud. D'altres tipus de forces son l'*externa*, la *interna*, l'*aplicada* i la de *reacció*. Com exemple, i seguint amb el model de la biga, consideri's la figura 1 que idealitza una biga sotmesa a càrregues diverses.

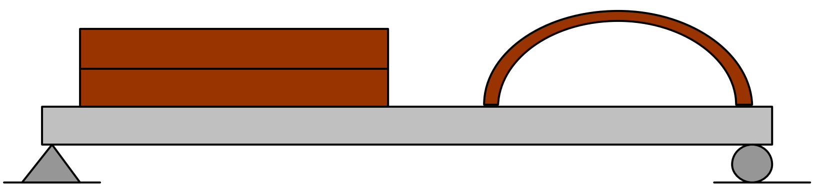


Figura 1. Biga amb elements al damunt

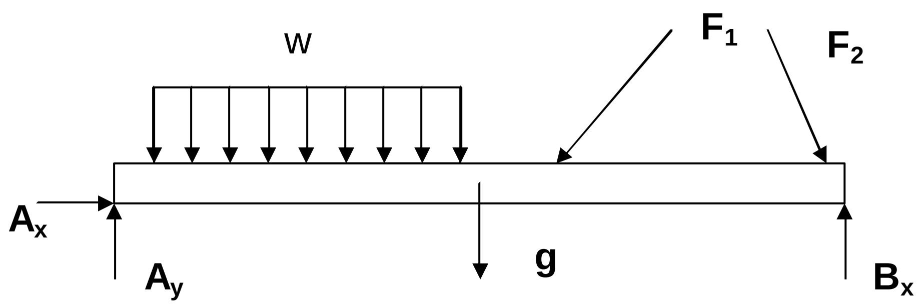


Figura 2. Diagrama de cos lliure de la biga

En la figura 2 es mostra un diagrama de cos lliure de la biga. El concepte de cos lliure fa referència a l'aïllament de l'element o sistema escollit i la incorporació de les forces que actuen sobre ell, siguin aquestes directes o a distància. Així i tot, totes les forces actuen sobre el diagrama del cos lliure de la biga son forces externes. És a dir, representen la interacció entre la biga i el seu entorn que ha estat desprès i no considerat com elements del sistema biga. Les forces F_1 i F_2 són forces concentrades, mentre que *w* és una càrrega uniformement distribuïda amb dimensions de força/longitud. Les forces F_1, F_2 i *w* s'anomenen forces o càrregues aplicades. Son les forces per les quals la biga ha estat dissenyada per suportar juntament amb el seu pes propi. Les forces A_x, A_y i B_x són les necessàries per evitar el moviment de la peça. Aquestes forces de recolzament s'anomenen *reaccions*. Cal destacar que en realitat, les distribucions de forces en els recolzaments son complicades de determinar, i és per aquest motiu que les reaccions es modelen, generalment, com a forces concentrades. Totes les forces, exceptuant la del pes, son forces externes al sistema biga. Tanmateix, en cada secció que es pogués idealitzar al llarg de la biga, existeixen grups de sistemes de forces internes, d'igual magnitud i sentit oposat entre els àtoms que es situen a ambdós costats de la secció. L'estudi de la mecànica de materials, o de la mecànica dels cossos deformables, depèn de la capacitat d'establir la tipologia i els valors d'aquestes forces internes en diferents seccions d'una estructura o sistema estructural, i com aquestes forces estan distribuïdes sobre les seccions més significatives.

En l'anterior descripció de les càrregues, es va veure que aquestes poden ser forces concentrades o forces distribuïdes. No obstant això, es va suposar que les forces no variaven amb el temps, és a dir, eren càrregues *estàtiques*. En molts d'altres casos, les càrregues poden ser una funció del temps, és a dir, càrregues *dinàmiques*. Per exemple, una càrrega sostinguda és una càrrega que es constant per un període llarg de temps; el pes de la mateixa estructura és el millor exemple d'aquest tipus de càrrega. Una càrrega d'impacte és una càrrega aplicada ràpidament, que transfereix una gran quantitat d'energia en un curt període de temps; un exemple típic seria el conjunt de forces que reben les bigues d'un pis que suporta una rentadora en funcionament. Normalment, en aquest darrer cas i en d'altres de similars, es generen vibracions, i l'equilibri no s'estableix fins que s'elimina la vibració, mitjançant forces naturals d'amortiment de l'estructura.

2.2- EQUILIBRI D'UN COS RÍGID

Un cos rígid, un cos que suposadament no es deforma sota l'acció de càrregues aplicades, està en equilibri quan la resultant del sistema de forces que hi actua al damunt es nul·la. Aquesta condició se satisfà quan

$$? \; F \; - \; 0$$ **Equació 4**

$$? \; M_o \; - \; 0$$ **Equació 5**

L'equació 1, que és vectorial, estableix que la suma de totes les forces externes que actuen sobre el cos es igual a zero. L'equació 2 estableix que la suma vectorials dels moments de les forces externes al voltant del punt o (punt origen que pot estar dins o fóra del cos) és zero. El moment és un concepte molt important de la física. Es pot definir com el producte d'una força per una distancia a un punt (o eix) determinat, i la seva representació és un vector perpendicular al pla que forma el vector força i el vector distancia entre el punt d'aplicació de la força i el punt determinat des d'on es defineix el moment[4]. Ambdues equacions vectorials son condicions necessàries i suficients per aconseguir l'equilibri del cos rígid. Les dues equacions vectorials d'equilibri poden escriure com sis equacions escalars, que defineixen l'equilibri per a cadascuna de les direccions x, y i z. Aquestes s'exposen a continuació en el grup d'equacions 3 i 4.

[4] El concepte es pot entendre millor mitjançant la visualització de la figura 18.

$? \; F_x \; - \quad 0$ $\qquad ? \; F_y \; = \quad 0$ $\qquad ? \; F_z \; = \quad 0$ **Equacions 6, 7 i 8**

$? \; M_{ox} - \quad 0$ $\qquad ? \; M_{oy} - \quad 0$ $\qquad ? \; M_{oz} \; - \quad 0$ **Equacions 9, 10 i 11**

Molts problemes de la mecànica de materials són de naturalesa bidimensional. El cas del model real que s'incorpora en aquesta treball és un exemple clar d'aquest tipus de simplificació. Si se seleccionen els eixos x i y com el pla d'actuació de les forces i a l'eix z perpendicular al mateix pla, les equacions es redueixen a tres. Cal tenir present que les equacions d'equilibri s'apliquen a un sistema de forces. El sistema de forces pot actuar sobre un cos individual, sobre un sistema de cossos connectats, o sobre una porció petita (infinitesimal) d'un cos individual. Un diagrama de cos lliure és un dibuix-esquema desenvolupat adequadament, que mostra un "cos objecte d'interès" separat de tots els altres cossos que hi interactuen i que mostra totes les forces externes, tant les conegudes com les desconegudes que s'apliquen al cos. Un diagrama de cos lliure correctament establert identifica clarament totes les forces –tan les conegudes a priori com les desconegudes- que han d'incloure's en les equacions d'equilibri.

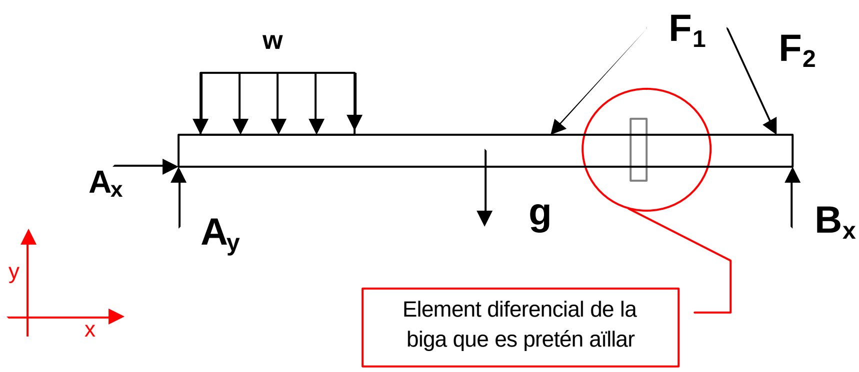


Figura 3. Diagrama de cos lliure de la biga amb una porció infinitesimal

La paraula "lliure" en la frase "diagrama del cos lliure" emfatitza la idea de que tots els cossos que exerceixen una influència determinada sobre el cos que ens interessa aïllar es retiren o es treuen, i se substitueixen només per les seves forces associades. En cada posició del diagrama del cos lliure d'on s'han enretirat d'altres cossos o peces, en 'trencar-se' el parells de forces d'igual magnitud i sentit oposat, han d'incorporar-se aquelles que formen la meitat que actuen sobre el diagrama del cos lliure. El diagrama del cos lliure estableix clarament quina part del cos s'està estudiant. Per entendre millor l'abast de la idea de diagrama de cos lliure i que s'entén per equilibri en qualsevol element o porció, s'il·lustra, mitjançant les figures 3 i 4 i el grup d'equacions 5, una secció genèrica infinitesimal d'una biga i la seva relació d'equilibri. Aquest diagrama exposa la necessitat d'entendre que qualsevol cos, o qualsevol part del mateix, és ple de forces internes que fan que aquest tingui una resistència interna, i que aquesta, li doni la forma que té. Aquestes forces, quan es representen en un pla secció de la peça, si es treballa en dues dimensions, sempre es poden simplificar en tres equacions d'equilibri: la que fa referència al eix x, la que fa referència al eix y i la que fa referència al moment perpendicular al pla x-y.

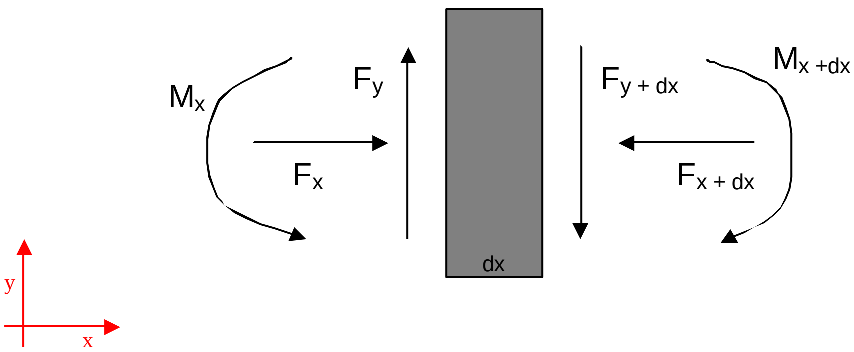


Figura 4. Diagrama de cos lliure de la porció infinitesimal de la biga

$$F_x + F_{x+dx} - 0$$
$$F_y + F_{y+dx} - 0$$
$$M_x + M_{x+dx} - 0$$

Equacions 12, 13 i 14

En general, per a bigues o peces amb una dimensió més gran que les altres dues, es fa servir una altra nomenclatura: les forces paral·leles a l'eix de la peça s'anomenen forces normals N, les forces perpendiculars reben el nom de tallant Q. Els moments no canvien de nom. Aquesta simplificació segons l'eix de la peça, és producte de l'experiència que diu que els materials es comporten de forma diferent amb les forces normals N que tracten de separar o unir els àtoms, i les forces tallants Q que tracten de fer que els àtoms llisquin entre sí a banda i banda de la secció normal a l'eix. D'altra banda, si les estructures i els problemes que han de resoldre's requereixen de tres dimensions, els diagrames de cos lliure es compliquen molt més i es necessita de formules matemàtiques més complexes.

2.3- EQUILIBRI D'UN COS DEFORMABLE

En una gran part dels problemes d'equilibri que l'enginyer a d'afrontar, se suposa que els cossos o elements estructurals son rígids; és a dir, la forma del cos i la seva orientació en relació amb els seus o límits se suposen independents de les càrregues aplicades al cos. Tanmateix, cap cos és perfectament rígid. Els tensors-cables subjectes a tensió s'estiren. Les bigues que suporten càrregues es deformen flexionant-se. Els eixos subjectes a parells de torsió es dobleguen. Un dels objectius principals de les teories de la mecànica de materials es desenvolupar relacions entre les càrregues aplicades a un cos no rígid i la deformació que el mateix cos sofreix.

Si un filferro o una biga o un eix és molt rígid, la quantitat de deformació serà considerada com a menyspreable en la solució de les equacions d'equilibri. Tanmateix, si el filferro o la biga o l'eix no és molt rígid, la deformació pot afectar les relacions del problema que es fan servir per escriure les equacions d'equilibri que, alhora, afectarà les solucions d'aquestes equacions d'equilibri. La interacció entre les càrregues que actuen sobre un cos, la seva deformació i la geometria del diagrama del cos lliure, fa que les solucions dels problemes de cossos deformables sigui molt més complexa que les solucions dels problemes de cos rígid. Fins al punt que s'han desenvolupat mètodes alternatius l'aparell matemàtic del qual és molt més senzill de tractar. De fet, aquesta treball representa un intent de mostrar aquesta relació entre les carregues sofertes i les deformacions experimentades per un cos, i fent-ho de forma il·lustrativa, senzilla i entenedora perquè pugi ésser comprés per persones no professionals com som els estudiants de batxillerat. A més, en el capítol del model experimental, es fa servir explícitament un mètode alternatiu caracteritzat per la seva senzillesa matemàtica.

3. ANÀLISI DELS ESFORÇOS

L'aplicació de les equacions d'equilibri és generalment només el primer pas en la solució dels problemes d'enginyeria. En la utilització d'aquestes equacions, un enginyer pot determinar les forces exercides sobre una estructura en els seus recolzaments, les forces sobre les unions que connecten les parts d'una màquina, o les forces internes en cables o varetes que suporten una estructura o que formen part d'ella.. Però, de més a més, com a segon pas igualment important, cal determinar l'efecte intern en totes les parts de l'estructura, de les forces aplicades. En aquest sentit, els tècnics han de saber poder calcular la intensitat de les forces internes a les que està sotmès cadascun dels elements de l'estructura en totes les seves parts, a més de poder calcular la deformació que cada element o part experimenta durant l'execució de la funció prevista.

Per assolir aquest coneixement i poder tractar adequadament la informació associada, cal introduir un certs conceptes fonamentals d'importància cabdal per a la comprensió satisfactòria dels problemes teòrics. Per a la mecànica de materials, és essencial un domini del significat físic de l'esforç i de la deformació. L'estudi del primer concepte es desenvolupa en aquest capítol. L'estudi de la deformació es fa en el capítol següent.

3.1- ESFORÇOS

Per descriure-ho d'una forma senzilla i entenedora, l'*esforç* es defineix com la intensitat de la força. Donat que els cossos sempre estan sotmesos a forces internes, aquests han de resistir aquestes per tal de mantenir la seva forma i proporcions; si no fos així, el cos podria trencar-se o deformar-se de forma excessiva. La intensitat d'una força –o esforç- es la força dividida per l'àrea sobre la que es distribueix. Així,

$$\text{Esforç} = \frac{\text{Força}}{\text{Àrea}} \qquad \textbf{Equació 15}$$

Com es pot comprovar en la mateixa definició matemàtica, l'àrea determina l'esforç, però aquesta àrea ve determinada per la disposició i orientació de la secció que la determina. És a dir, els esforços venen determinats segons la direcció de la secció que es pren. Per facilitar la comprensió, el plantejament i la resolució dels problemes reals que ha d'afrontar l'enginyer en les seves tasques, el desenvolupament teòric introdueix dos tipus d'esforços: l'esforç normal i l'esforç tallant. La raó principal d'aquesta divisió és que els estudis experimentals indiquen que els materials estructurals responen de forma diferent a les forces que tendeixen a separar o unir superfícies que a les forces que tendeixen a fer que les superfícies llisquin entre sí. Per això, la força interna resultant normalment és descomposta en la component axial i en la component tangencial, que a la vegada, generen els esforços normals i els esforços tallants respectivament. Aquestes són les components amb que es divideix la força interna i que es fan servir per calcular els esforços totals en la superfície de la secció de la peça estudiada. Els estudiosos han pres aquestes definicions perquè l'experiència els ha demostrat que els esforços en un punt d'una estructura depenen de l'orientació de la secció, que alhora determina la mida i les propietats de l'àrea generada. S'ha desenvolupat una teoria per poder trobar els esforços per a tot tipus de disposicions de les seccions, tanmateix, interessa tornar a insistir que hi ha dos grans tipus d'esforços, i que son màxims en elements allargassats i esvelts quan les seccions son perpendiculars a la directriu[5] de l'element. Com un fet a afegir en el desenvolupament teòric, en el càlcul de la resistència per a l'elaboració del disseny, els esforços crítics de disseny que es prenen en cada punt son els màxims, i aquests els trobem en les seccions perpendiculars a la directriu.

3.2- ESFORÇ NORMAL

Per entendre millor aquest tipus d'esforços cal tornar a introduir la idea de la biga com un element que té una dimensió molt més gran que les altres dues. Aquesta és la dimensió longitudinal, i respecte d'aquesta es procedeix a fer una secció, tal com s'il·lustra en la figura 5. La idea que cal desenvolupar és que dintre d'una peça estructural existeixen unes forces que uneixen els àtoms d'aquesta de tal manera que aquestes forces son les donen cohesió i continuïtat a la peça; és a dir la peça es pot considerar una peça precisament perquè es un element continu i estable en la seva forma.

[5] Qualsevol volum amb la propietat de tenir seccions iguals, aquest és producte de la interacció de dos tipus de corbes: la directriu i la generatriu. La directriu és la que marca la posició en l'espai de la peça; la generatriu marca la forma i dimensions finals de la peça. En el cas de la biga, la directriu seria la direcció de la dimensió més gran.

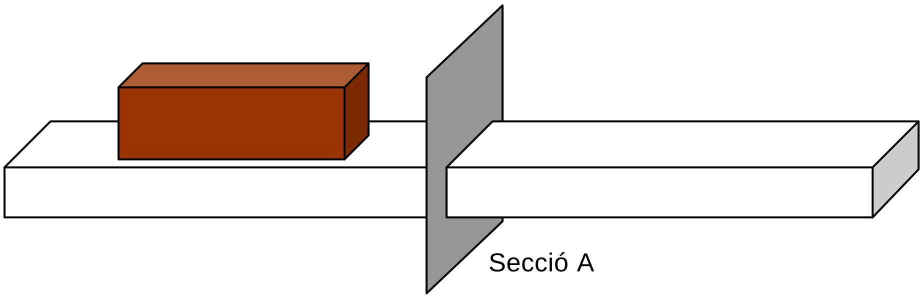


Figura 5. Biga amb la secció A

Si fem una secció transversal A qualsevol a la biga, tal com s'il·lustra en la figura 5 i fem un diagrama de cos lliure d'una de les parts de la biga, tal com s'indica en la figura 6,

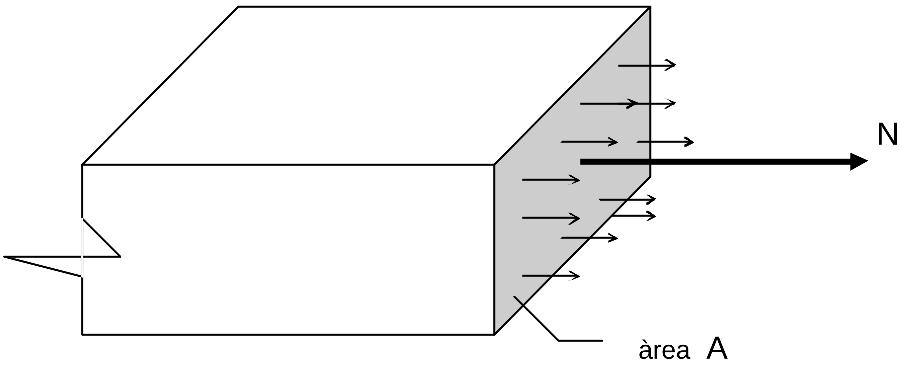


Figura 6. Secció A resultant del tall amb les forces normals a la secció

trobem que en aquesta secció hi ha una distribució de forces internes amb una resultant N que és perpendicular a la superfície de la secció A que hem creat. Aquesta força N serveix per unir les parts de la biga just en el pla de la secció que hem establert. En una secció transversal qualsevol, la intensitat mitjana d'aquesta força interna, que es coneix com l'esforç normal promig s_{prom}, pot calcular-se com:

$$s_{prom} = \frac{N}{A}$$ **Equació 16**

on N és la suma de les forces en la direcció de barra i A és l'àrea de la secció transversal de la biga. En el desenvolupament teòric de la resistència de materials, la lletra grega sigma *s* és la lletra que es fa servir per descriure els esforços normals. Si volguéssim saber la tensió s en un punt qualsevol de l'àrea A, tal com es veu en la figura 7,

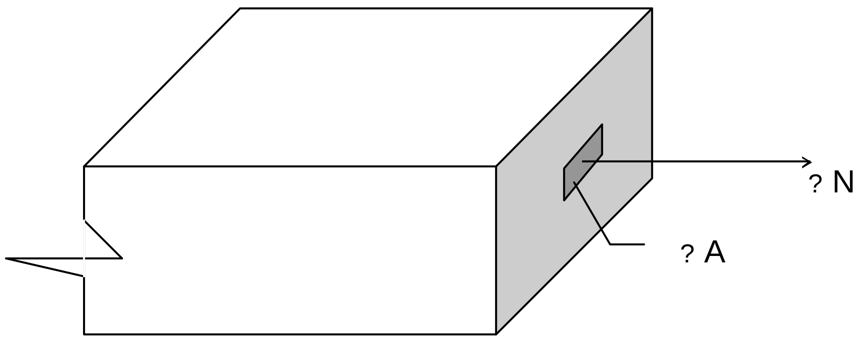


Figura 7. Secció A resultant amb el punt diferencial

enlloc del valor promig, hauríem de fer el càlcul utilitzant límits, obtenint-se:

$$S = \lim_{?A?0} \frac{?N}{?A}$$

Equació 17

En general, l'esforç s_{prom} i l'esforç s puntual no seran iguals. Tanmateix, per a estructures llargues i esveltes, és a dir, amb una dimensió més gran que les altres dues, com poden ser les bigues o les barres, i sotmeses a càrregues axials[6], es pot suposar que els esforços normals tenen una distribució uniforme, excepte en els punts propers d'aplicació de les càrregues, punts que solen ser els extrems i els punts de recolzaments de les peces.

3.3- ESFORÇ TALLANT

L'altre gran tipus d'esforç que pot sofrir un element estructural és l'esforç tallant. Si agafem la biga anterior i fem una secció similar a la que hem fet servir per definir l'esforç normal, tal com s'il·lustra en la figura 8, ens adonem que per garantir la unió de les dues parts de la biga, en termes de que les superfícies resultants de la secció no llisquin una sobre l'altre, calen unes noves forces paral·leles al pla de la secció que donin continuïtat a l'element estructural.

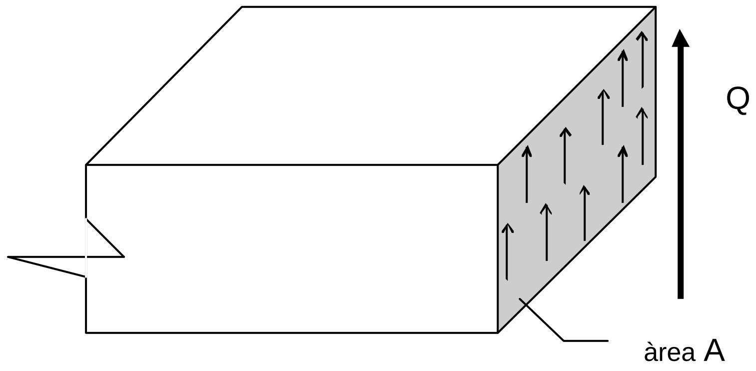


Figura 8. Secció A resultant amb les forces tangencials a la secció

Aquestes forces Q, que eviten el lliscament, generen, per la seva banda, els anomenats esforços tallants. En el camp de l'enginyeria es fa servir la lletra tau *t* per denotar les tensions de l'esforç tallant. L'esforç tallant promig per a la secció A transversal a la biga pot calcular-se matemàticament com es mostra en l'equació 15,

$$t_{prom} = \frac{Q}{A} \qquad \textbf{Equació 18}$$

on Q es la magnitud de la força tallant Q i A és l'àrea transversal de la biga tal com es mostra en la figura 8. D'altra banda, fent el mateix símil i usant el mateix procediment, es

[6] Les càrregues axials son les càrregues que son paral·leles a la directriu de la peça.

podria calcular l'esforç a tallant en un punt de la secció transversal, tal i com es mostra en la figura 9.

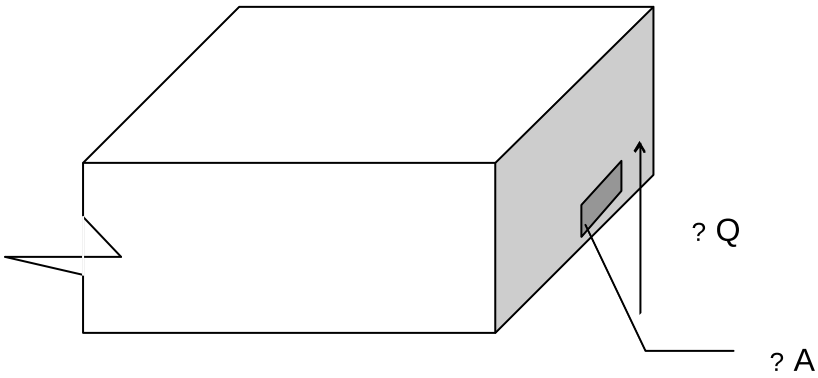


Figura 9. Secció A resultant amb el punt diferencial

El resultat obtingut es podria calcular matemàticament com es mostra en l'equació 16. Així,

$$t = \lim_{? A ? 0} \frac{? Q}{? A}$$ **Equació 19**

A diferència de l'esforç normal, en membres llargs i esvelts, tipus bigues o barres, s'ha demostrat que l'esforç t no es distribueix uniformement en l'àrea. Conseqüentment, l'esforç tallant veritable per a qualsevol punt en particular i l'esforç tallant màxim en una secció transversal seran diferents, en general, de l'esforç tallant promig calculat mitjançant l'equació 15 introduïda anteriorment. Així per exemple, en peces massisses, però llargues i esveltes, el valor màxim de l'esforç tallant es produeix en el la zona perimetral de la secció. Aquest tipus de respostes força els enginyers a desenvolupar teories molt més elaborades per trobar el disseny òptim de cadascun dels elements.

Donat que l'esforç és la intensitat de la força interna, aquest té dimensions de força per unitat d'àrea (FL^{-2}). En els problemes amb unitats del Sistema Internacional, les forces es donen en newtons (N) o quilonewtons (kN), les dimensions en metres (m) o mil·límetres (mm.) i les masses en quilograms (kg.). La unitat SI per a l'esforç és el newton per metre quadrat (N/m^2), també conegut com Pascal (Pa). Les magnituds d'esforç que es troben normalment en aplicacions de l'enginyeria s'expressen en meganewtons per metre quadrat (MN/m^2) o megapascals (Mpa).

4. ANÀLISI DE LA DEFORMACIÓ

En les pàgines anteriors s'establiren les relacions formals i fonamentals entre forces i esforços sobre plans que tenen diferents orientacions en un punt, amb l'ús de les consideracions d'equilibri. No s'han fet suposicions que poguessin incloure deformacions o que tinguessin en compte els mateixos materials que donaven cos als elements estructurals. Consegüentment, els resultats eren només vàlids per a un cos rígid idealitzat, o en el seu defecte per un cos deformable real sense propietats establertes a priori. En el disseny d'elements estructurals, les deformacions que experimenta un cos, com a resultat de les càrregues aplicades, representen amb molta freqüència una consideració de disseny tan important com els esforços. Per aquesta raó, l'enginyeria ha considerat molt important desenvolupar conceptes que serveixin per a l'estudi dels cossos deformables reals. En termes generals, caldrà introduir una sèrie de conceptes lligats a la deformabilitat dels cossos.

4.1- DESPLAÇAMENT

Quan s'aplica un sistema de càrregues a un element estructural real, els punts individuals del cos generalment es mouen. Aquest moviment d'un punt respecte d'algun sistema d'eixos de referència prèviament establert, és una quantitat vectorial anomenada *desplaçament*. En alguns casos, els desplaçaments s'associen a una translació, o a una rotació, o a ambdues, del cos com un tot i no canvien ni la mida ni la forma del cos. L'estudi dels desplaçaments per als quals no canvia ni la mida ni la forma del cos és l'objectiu de la matèria coneguda com mecànica dels cossos rígids. Quan els desplaçaments induïts per les càrregues aplicades produeixen l'alteració de la mida, de la forma del cos, o d'ambdós, els punts individuals del cos es mouen relativament entre si. Aquest fenomen rep el nom de deformació.

4.2- DEFORMACIÓ

Es coneix com a *deformació* el canvi de qualsevol dimensió associada amb els desplaçaments relatius dels punts, i se li assignarà la lletra grega delta *d* per esmentar-la. La deformació és un terme absolut i per tant està més relacionat amb la geometria del cos que no pas únicament amb la força o l'esforç que la produeixen. Així, per exemple i tal com es veu en la figura 10, dues varetes de material idèntic i àrea transversal idèntica, subjectes a càrregues diferents, poden tenir la mateixa deformació si la segona vareta té la meitat de la longitud de la primera.

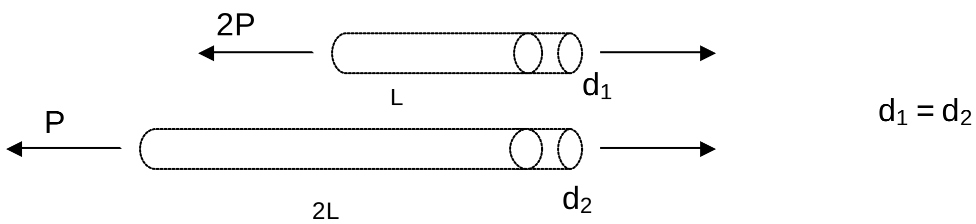


Figura 10. Deformacions iguals amb esforços diferents

Encara que la definició de la deformació és un concepte útil, es necessita una mesura quantitativa de la intensitat de la deformació, de la mateixa manera que es fa servir l'esforç per mesurar la intensitat d'una força interna.

4.3- DEFORMACIÓ UNITÀRIA

La *deformació unitària*, o deformació per unitat de longitud, és la magnitud que es fa servir per mesurar la intensitat d'una deformació, així com l'esforç (força per unitat d'àrea) es fa servir per mesurar la intensitat d'una força interna. En el capítol anterior, es definiren dos tipus d'esforços: els esforços normals i els esforços tallants. En el cas de les deformacions unitàries, es desenvolupa la teoria de la mateixa manera. La *deformació unitària normal*, designada per la lletra grega èpsilon *?*, mesura el canvi de mida -allargament o escurçament d'un segment de línia arbitrari- d'un cos durant la deformació. La *deformació angular*, designada amb la lletra grega gamma *?*, mesura el canvi de forma -canvi de l'angle entre dues línies que son ortogonals en l'estat inicial no deformat- d'un cos durant la deformació. La deformació o deformació unitària pot ser el resultat d'un esforç, d'un canvi de temperatura, o d'altres fenòmens físics com el creixement de la fibra o la contracció de la mateixa.

4.4- DEFORMACIÓ UNITÀRIA AXIAL[7]

Es pot entendre la idea de la deformació unitària normal associant-la al canvi de longitud d'una barra simple subjecte a càrrega axial, tal com s'il·lustra en la figura 11:

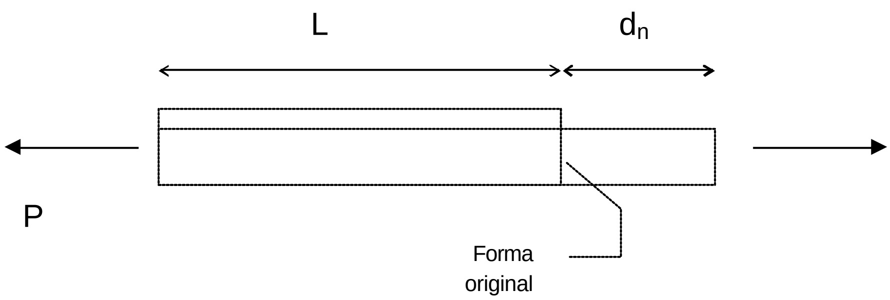


Figura 11. Definició de la deformació unitària axial

La deformació unitària axial promig ? $_{prom}$ damunt la longitud de la barra, s'obté al dividir la deformació axial d_n entre la longitud original de la barra, la longitud L, tal com es presenta en l'equació 20:

$$? _{prom} = \frac{d_n}{L}$$ **Equació 20**

És a dir, la deformació unitària axial és la deformació axial en la direcció de la longitud, d_n, dividida entre la longitud L. S'entén doncs que es una mesura que mesura la proporcionalitat. Tanmateix, en aquells casos en els quals la deformació no és uniforme al llarg de la longitud de la barra, la deformació unitària axial promig, donada per l'equació anterior, pot ser molt diferent de la deformació unitària axial en un punt arbitrari P situat al llarg de la barra. La deformació unitària axial en un punt pot determinar-se escurçant cada vegada més la longitud sobre la qual es mesura la deformació axial. Per al límit quan la

[7] Més endavant es canvia el terme axial pel terme normal, malgrat es faci referència al mateix concepte. Aquest canvi es degut al fet del vocabulari conceptual emprat en la pràctica diària pels enginyers.

longitud L tendeix a zero, ? L ? 0, s’obté una quantitat definida com la *deformació unitària axial* en el punt, ?(P). Aquest procés al límit es defineix matemàticament amb l’equació 21.

$$? (P) = \lim_{? L ? 0} \frac{? d_n}{? L} = \frac{d\, d_n}{d\, L}$$ **Equació 21**

4.5- DEFORMACIÓ ANGULAR

D’una forma similar, apareix un altre tipus de deformació que expressa una relació de canvi de forma. Aquesta rep el nom de deformació angular. La deformació angular promig $?_{prom}$ s’obté de dividir la deformació d_s en una direcció normal a la longitud L entre la longitud mateixa L, tal com es veu en la figura 12.

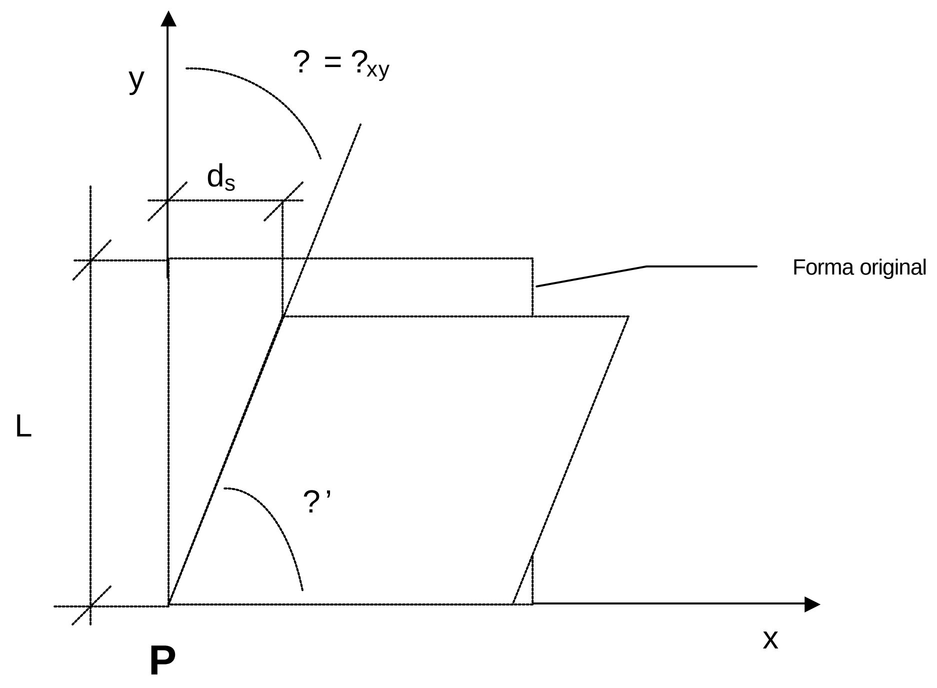


Figura 12. Definició de la deformació unitària angular

En la figura 12 es pot comprovar que les deformacions entre els diferents punts porten a establir relacions trigonomètriques tal com es pot establir en l'equació 22. Tanmateix, el valor d_s / L és en general molt petit (de l'ordre de d_s / L < 0.001). Per tant, les relacions trigonomètriques esdevenen directament relacions angulars, és a dir, sin ? ˜ tan ? ˜ ?, on ? es mesura en radians.

$$?_{prom} = \frac{d_s}{L} = \tan ?$$

Equació 22

En conseqüència, el valor del paràmetre $?_{prom}$ = ? = d_s/L és el decreixement de l'angle comprés entre dues línies de referència que son ortogonals[8] en l'estat inicial de no deformació. Novament, per aquells casos en els quals la deformació no és uniforme, s'obté la deformació angular en un punt, $?_{xy}$(P), associada a dues línies de referència x i y ortogonals, mesurant la deformació per tallant a mesura que la mida de l'element es fa cada vegada més petit. Per al límit quan la longitud L tendeix a zero, ? L ? 0, s'obté una quantitat definida com la *deformació angular* en el punt, $?_{xy}$(P). Aquest procés al límit es defineix matemàticament amb l'equació 23.

$$?_{xy}(P) = \lim_{? L ? 0} \frac{? \, d_s}{? \, L} = \frac{d \, d_s}{d \, L}$$

Equació 23

L'angle $?_{xy}$ és difícil d'observar i més encara de mesurar. De vegades, és útil a l'hora de procedir als càlculs específics, l'expressió equivalent de l'equació 24 per a la deformació angular, on ?' és l'angle en l'estat deformat entre dues línies de referència inicialment ortogonals.

[8] El terme ortogonal vol dir perpendicular, i és comunament utilitzat en el vocabulari conceptual dels matemàtics, dels físics i dels enginyers

$$?_{xy}(P) = \frac{p}{2} - ?'$$ **Equació 24**

En general la deformació angular és un terme que s'utilitza i es té en consideració només per a fer recerca en profunditat, és a dir a nivell de doctorat de les universitats. Es requereix d'un grau de coneixement molt elevat que ni els mateixos enginyers pràctics tenen ni fan servir.

Totes les equacions anteriors indiquen que tant la deformació unitària normal com la deformació angular són quantitats adimensionals. Tanmateix, les deformacions unitàries normals s'expressen freqüentment en unitats de mil·límetres o micres, mentre que les deformacions angulars s'expressen en radians i microradians[9]. De les definicions anteriors de deformació unitària normal, es fa entendre que el valor serà positiu quan la línia s'allargui i negativa quan s'escurci. D'altra banda, s'observa que les deformacions angulars son positives si l'angle entre línies de referència disminueix, i negatives al contrari. Les deformacions unitàries normals i les deformacions unitàries angulars per a la majoria dels materials usats en enginyeria en el rang elàstic -que ja definirem posteriorment- no acostumen a excedir del 0.2 per cent (0.002 mm/mm ó 0.002 rad).

4.6- ESTAT DE DEFORMACIÓ EN UN PUNT

Tota la teoria al voltant de la deformació exposada en els apartats anteriors han servit per transmetre el concepte de deformació unitària com deformació per unitat de longitud, però és inadequada e incompleta per tot allò que no sigui l'aplicació de la càrrega en una direcció. En molts problemes pràctics d'enginyeria, per no dir la majoria d'ells, són massa complexos i farfallosos per permetre la determinació dels esforços únicament amb la formulació bàsica dels principis matemàtics. Es necessita que la teoria abstracta es complementi amb teoria aplicada, a més de prendre mesures de laboratori, que són determinants per definir les capacitats i propietats resistents i de deformació dels materials.

Les deformacions unitàries poden mesurar-se mitjançant varis mètodes, però amb excepció dels casos més simples, els esforços no poden obtenir-se directament.

Conseqüentment, el procediment que s'usa en l'anàlisi experimental dels esforços, consisteix en mesurar les deformacions unitàries i calcular l'estat d'esforços usant les equacions d'esforç-deformació unitària que es presenten en el capítol següent.

L'estat complert de deformacions unitàries per a un punt P arbitrari en un cos subjecte a càrregues, pot determinar-se considerant la deformació associada a un petit volum material que envolta el punt. Per conveniència, normalment se suposa que el volum té forma de paral·lelepíped rectangular, amb les cares orientades perpendicularment als eixos de referència x, y i z, tal com es mostra en la figura 13. S'ha decidit no exposar cap desenvolupament matemàtic perquè aquest és molt complex i supera el propòsit d'aquest treball. Tanmateix, la idea que es vol transmetre es que s'apliquen els mateixos conceptes i principis que es fan servir per una dimensió, però fent-ho amb tres.

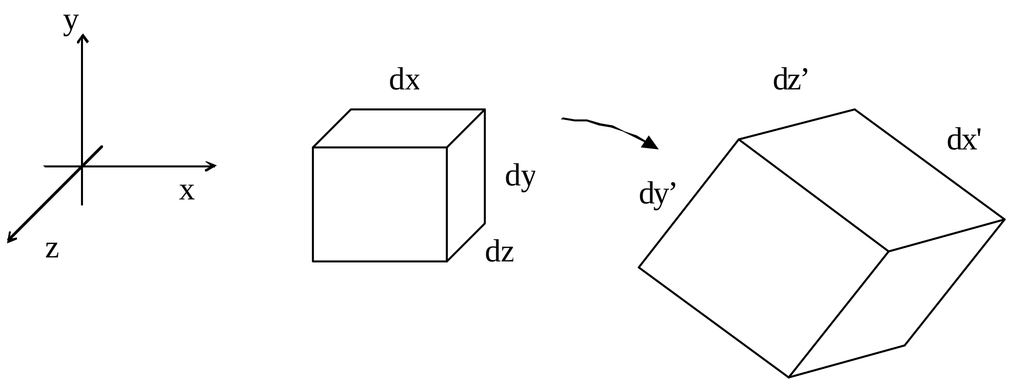


Figura 13. Generalització conceptual de la teoria de l'elasticitat per a tres dimensions

[9] Sovint s'usa el símbol µ per indicar micro (10^{-6})

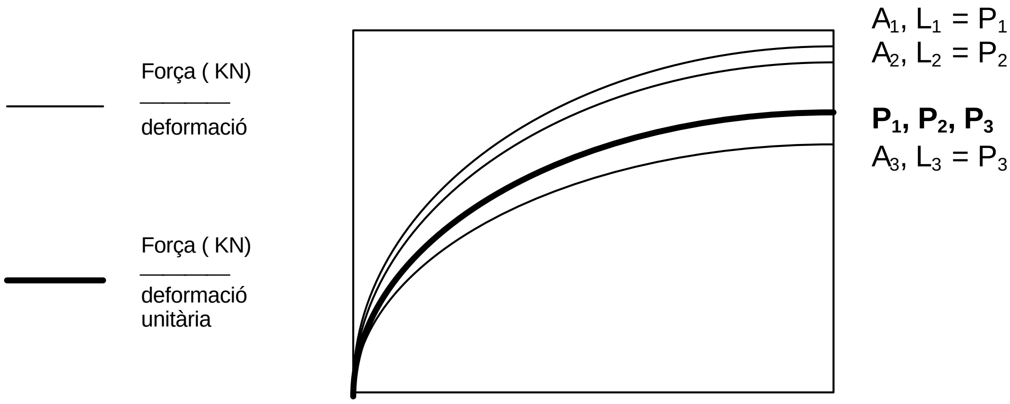
5. RELACIONS ESFORÇ-DEFORMACIÓ

El comportament satisfactori d'una estructura està determinat, freqüentment, per la quantitat de deformació o de distorsió que se li permet com a paràmetre de disseny, sempre i quan ja es doni per suposat que la peça no es pot trencar. Una deformació d'unes quantes mil·lèsimes de centímetre pot fer que una màquina perforadora sigui inútil, mentre que el ganxo d'un cable d'arrossegament per dragar pot flexionar-se alguns centímetres sense que la seva utilitat se'n ressenti. L'objectiu de l'enginyer es proposar les diferents possibilitats que els materials i els dissenys poden donar, i escollir una solució satisfactòria per a les necessitats pràctiques que s'han definit prèviament.

De més a més, freqüentment és necessari de poder relacionar les càrregues i els canvis de temperatura d'una estructura, amb les deformacions produïdes per les mateixes càrregues i els mateixos canvis de temperatura. L'experiència ha demostrat que les deformacions causades per les càrregues i pels efectes de la temperatura son essencialment independents entre sí. Les deformacions degudes als dos efectes poden calcular-se per separat i sumar-se per obtenir la deformació total. L'objectiu d'aquest treball és centrar-se en l'explicació de la influència de les càrregues, deixant de banda qualsevol influència de la temperatura.

5.1- DIAGRAMES D'ESFORÇ-DEFORMACIÓ UNITÀRIA

La relació entre les càrregues i la deformació d'una estructura pot obtenir-se mitjançant diagrames que mostren els valors de les càrregues i els de les deformacions obtingudes per a un membre determinat d'un estructura. Tanmateix, la relació entre càrrega i deformació depèn de les dimensions dels elements, així com del tipus de material de que estan formades aquestes estructures. És per aquesta raó que la teoria de la resistència dels materials, ha creat, enlloc dels diagrames càrregues-deformació, els diagrames que reben el nom de *diagrames d'esforç-deformació unitària*. Les corbes que mostren la relació entre esforç i deformació unitària, tal com es veu en el gràfic 1, son independents de la mida L i de la forma A de la peça (peces P_1, P_2 i P_3), i depèn només del tipus de material amb el qual estan fetes aquestes.



Gràfic 1. Diagrames força-deformació i esforç-deformació unitària

Les dades per als diagrames d'esforç-deformació unitària s'obtenen aplicant una càrrega axial a una proveta estandarditzada i normalitzada, i mesurant simultàniament la càrrega i la deformació. Aquest procés es fa mitjançant una màquina d'assaigs, que efectua una càrrega i mesura la deformació. L'esforç s'obté dividint la càrrega entre l'àrea transversal inicial de la proveta. Cal constatar que l'àrea canviarà lleugerament durant l'aplicació de la càrrega. No obstant això, l'esforç que s'usa més comunament per al disseny de les estructures parteix de l'àrea inicial.

D'altra banda, les deformacions unitàries són petites en els materials que s'usen en les estructures i màquines de l'enginyeria i de la indústria, generalment menors que 0.001. Conseqüentment, la seva determinació exacta requereix d'equips especials de medició, que pel seu cost només tenen els laboratoris especialitzats. La deformació unitària normal s'obté mesurant la deformació d en una longitud L i dividint la primera per la segona. Els instruments per mesurar la deformació d reben el nom de *mesuradors de deformacions unitàries* o *extensòmetres* , i aconsegueixen la precisió adequada mitjançant les més noves tècniques de mesura com els feixos de llum o resistències elèctriques.

Hi ha dos paràmetres homòlegs als anteriors, l'esforç vertader i la deformació unitària vertadera, que són producte de la voluntat d'obtenir una precisió màxima dels resultats i del control del procediment. Ambdós paràmetres només es fan servir per a qüestions de recerca i són usats bàsicament en el món acadèmic. I tanmateix, la diferencia entre els uns i els altres es consideren menyspreables en l'enginyeria real per raons pràctiques.

Malgrat els diagrames esforç-deformació unitària i els conceptes que se'n deriven tenen una base teòrica, hi ha un suport a tal hipòtesi basat en l'evidència empírica que, de vegades, reajusta la mateixa teoria, tot reafirmant-la. El cas més exemplar seria l'afirmació conceptual que afirma que, per petites deformacions, la relació entre l'esforç i la deformació unitària és de tipus lineal.

5.2- MÒDUL D'ELASTICITAT

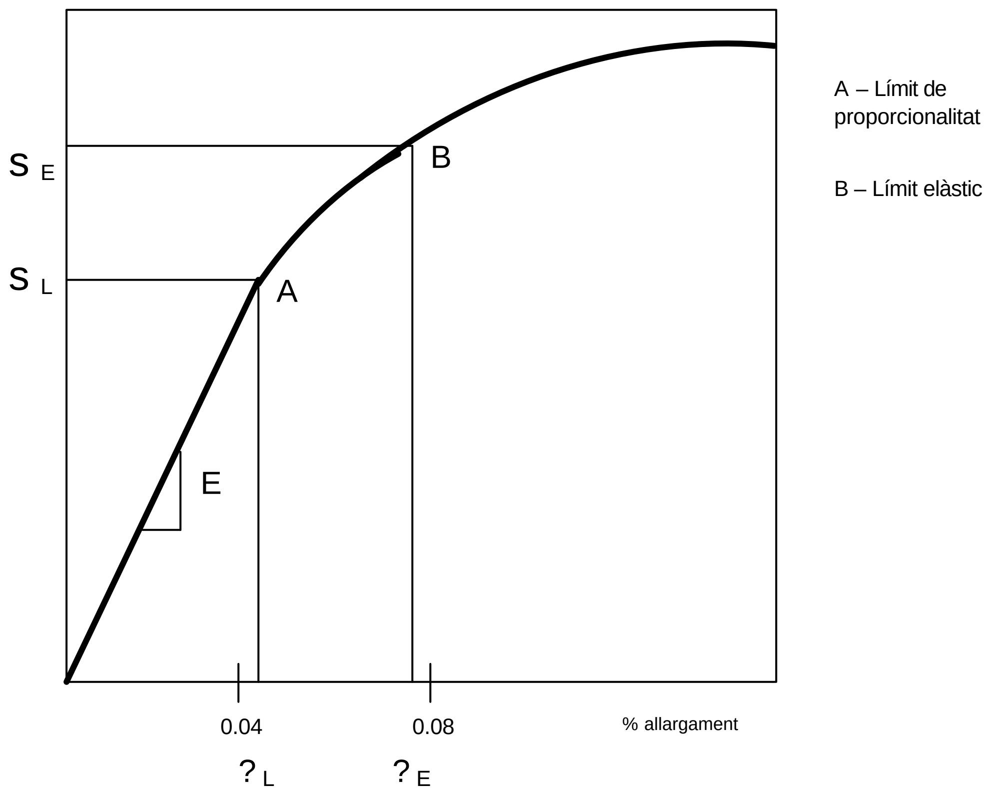
La part inicial del diagrama d'esforç-deformació unitària per a la majoria dels materials que es fan servir en les estructures d'enginyeria és una línia recta. Els diagrames d'esforç-deformació unitària per alguns materials, com l'acer o el formigó mostren una lleugera curvatura inclòs per a petits esforços, però és pràctica comuna dibuixar i establir una línia recta per fer una mitjana de les dades de la primera part del diagrama i ignorar la curvatura. Així, la modelització esdevé molt més senzilla, tal com es pot veure en el gràfic 2.

La proporcionalitat entre la càrrega i l'estirament, relació del primer tram de les gràfiques esforç-deformació unitària per a materials tipus acer, fou enregistrada per primera vegada per Robert Hooke, qui va observar l'any 1678 que l'estirament d'un membre estructural produït per una càrrega axial es directament proporcional a la magnitud de la càrrega aplicada al membre. Freqüentment, es coneix aquesta relació com la llei de Hooke, que matemàticament esdevé expressada en l'equació

$$S = E \cdot ?$$

Equació 25

Cal donar-se compte i recordar que la llei de Hooke descriu només la part lineal inicial del diagrama esforç-deformació unitària, i és vàlida només per a barres subjectes a càrregues en extensió uniaxial.



Gràfic 2. Diagrama esforç-deformació unitària per a materials tipus acer

L'any 1807, Thomas Young va suggerir un concepte que equival a usar la relació entre l'esforç i la deformació unitària per mesurar la rigidesa d'un material. Aquesta relació es coneix com *mòdul de Young* o *mòdul d'elasticitat*, i és el pendent de la part recta del diagrama d'esforç-deformació unitària. El mòdul de Young es presenta matemàticament com es mostra en l'equació 26:

$$E = \frac{s}{?}$$

Equació 26

Un mòdul similar, que es presenta en l'equació 27, anomenat *mòdul per tallant* o *mòdul de rigidesa* relaciona l'esforç tallant t amb la deformació angular ?.

$$G = \frac{t}{?}$$

Equació 27

L'esforç màxim s_L per al qual l'esforç i la deformació unitària son proporcionals s'anomena límit de proporcionalitat, i s'indica per les ordenades del punt A del gràfic 2. El punt exacte del límit de proporcionalitat és difícil de determinar a partir de la corba d'esforç deformació unitària, però per al cas de l'acer i del formigó ja son molt ben coneguts per la importància històrica dels materials.

5.3- LÍMIT ELÀSTIC

Es diu que una acció, una força, és elàstica si la deformació unitària que resulta de l'aplicació de la càrrega desapareix quan s'enretira la càrrega. El límit elàstic, indicat pel punt B en el gràfic 2, és l'esforç màxim per al qual el material es comporta elàsticament; és a dir, és l'esforç màxim per al qual la deformació desapareix quan desapareix la força que la produeix. Per a esforços superiors al límit elàstic, una part de la deformació roman quan s'enretira totalment la càrrega. Aquesta nova deformació permanent s'anomena deformació plàstica, i necessita d'una nova teoria per poder entendre la seva dinàmica.

Per als punts de la corba esforç-deformació unitària que es troben més enllà del límit elàstic, hi ha tot un desenvolupament teòric que va més enllà de l'objectiu del treball, però que introdueix molts altres conceptes com la deformació plàstica, el punt de fluència, resistència de fluència, resistència última, ductilitat, etc. Tots aquests conceptes es fan servir per a fer recerca d'alt nivell i no tant per al desenvolupament quotidià de l'enginyeria pràctica. Quan l'esforç sobrepassa el límit de proporcionalitat i sobretot el límit elàstic no existeix una relació simple entre l'esforç i la deformació unitària, i tot el desenvolupament esdevé objecte d'estudi de científics. La majoria de les estructures d'enginyeria estan dissenyades de tal manera que els esforços siguin molt menors que el límit de proporcionalitat, de l'ordre d' 1/3 o d'1/2. Això fa que l'enginyer sempre estigui segur que treballa en el rang lineal, on la informació pràctica es molt abundant i la seguretat està garantida.

6. MODEL EXPERIMENTAL

Els capítols anteriors han servit per exposar la teoria bàsica que tots els enginyers fan servir per al càlcul de les estructures. Es pot comprovar que els principis son molt senzills, però quan es posen a la pràctica, es comprova que les modelitzacions matemàtiques i els càlculs són molt complexos. El problema principal rau en el fet que el diagrama de sòlid lliure de les estructures reals són molt complexes, tant pel nombre de variables que hi intervenen, com pel plantejament matemàtic de les equacions i el procediment de resolució de les mateixes. De fet, l'enginyeria pràctica, en l'actualitat, només treballa mitjançant l'ús de programes informàtics que han estat desenvolupats per calcular internament tots els passos intermitjos, i on només cal introduir els valors de les variables inicials del problema.

6.1- OBJECTIU DEL MODEL EXPERIMENTAL

Els capítols anteriors han mostrat els conceptes bàsics de la mecànica: l'esforç i la deformació. Tal com s'ha esmentat, l'objectiu del treball consisteix a mostrar la relació entre aquests esforços i aquestes deformacions. Els primers teòrics de la mecànica i de la teoria de la resistència de materials, en veure la dificultat de resolució de certs problemes pràctics, van desenvolupar plantejaments teòrics alternatius on les formules matemàtiques esdevenien molt més senzilles de resoldre. Alguns d'aquests mètodes no parteixen estrictament de l'anàlisi directe de les relacions entre l'esforç i la deformació, sinó que utilitzen d'altres procediments analítics amb altres variables conceptuals. A més a més, s'ha constatat que intentar desenvolupar un model experimental que obtingui algun dels paràmetres en funció d'altres de forma directe, és una tasca impossible per a un treball de batxillerat, ja que l'estudi directe aquesta només està a l'abast dels laboratoris professionals de l'empresa privada o de les universitats.

Un mètode molt utilitzat en mecànica i estàtica bàsica és el que es basa en els conceptes de treball i energia potencial. És el mètode dels treballs virtuals. Aquest treball desenvolupa un model experimental que utilitza aquest mètode de resolució. Per exposar de forma comprensible i entenedora els conceptes de la mecànica, la part experimental del treball presenta una màquina que calcula la 'resistència' de les molles, mitjançant l'obtenció empírica dels valors d'una variable molt semblant al mòdul d'elasticitat dels materials, però específica per les molles. Aquest nou mòdul característic de les molles s'anomena *constant elàstica* de la molla, i s'identifica amb la lletra ***k***. Aquest és l'objectiu de la part del treball empírico-pràctic: l'obtenció del valor de la constant k de rigidesa de la molla.

6.2- TREBALL VIRTUAL

El mètode dels treballs virtuals proporciona un mitjà convenient per determinar una força incògnita quan es poden determinar els desplaçaments de les forces aplicades en funció del desplaçament d'una força incògnita. Com que la majoria de problemes d'equilibri fan referència a cossos en repòs, els desplaçaments que intervinguin en el procés seran virtuals, és a dir imaginaris o ficticis. D'aquí ve el nom de mètode dels desplaçaments virtuals o dels treballs virtuals. Aquest mètode és molt útil quan s'estudien sistemes de cossos connectats. Freqüentment, quan s'utilitzen les equacions d'equilibri per resoldre problemes de la mecànica, s'ha de 'desmembrar' el sistema per tal de determinar una reacció particular. Tanmateix, quan s'utilitza aquest mètode no és necessari buscar les forces interiors del sistema.

6.2.1- Treball[10] d'una força

Un punt material P es mou, sota l'acció d'una força F, des de un punt A fins a un punt B al llarg d'un camí corbat S, tal com es mostra en la figura 14.

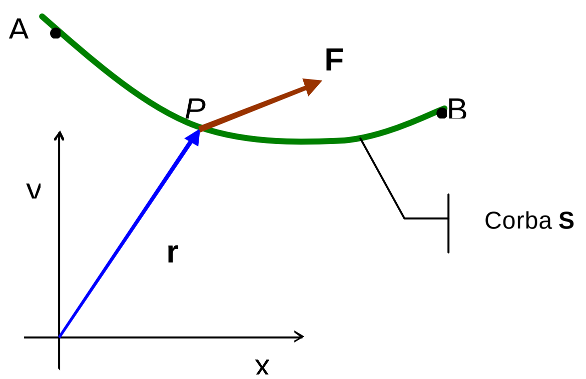


Figura 14. Cinemàtica d'un punt sota l'acció d'una força

[10] En la vida quotidiana, la paraula *treball* s'aplica a tota forma d'activitat, però en la mecànica té un ús mes restringit.

La posició del punt P al llarg del camí la determina el vector de posició **r**. En moure's P una distancia infinitesimal del punt 1 al punt 2, el seu vector posició varia de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$, tal com s'aprecia en la figura 15. El moviment del punt, en passar del punt 1 al punt 2, és descrit pel vector $d\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ i rep el nom de desplaçament lineal. Com que la longitud *ds* de l'arc al llarg de la corba és infinitesimal, la direcció del vector *d***s** serà tangent al camí *s* i el mòdul del vector *d***s** serà la seva longitud *ds*.

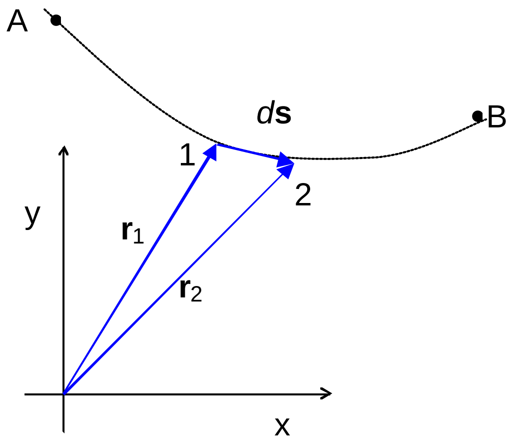


Figura 15. Moviment diferencial d'un punt al llarg d'una corba

Per definició, el treball *dU* efectuat per una força **F** que s'aplica sobre un punt material, quan aquest passa del punt 1 al punt 2, és el producte escalar dels vectors **F** i *d*s. Així,

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = |\mathbf{F}|\,|d\mathbf{s}|\ \cos a = F\,ds \cos a \qquad \textbf{Equació 28}$$

Tal com indica la figura 16, el treball *dU* es pot considerar que és el producte de la component de la força segons el desplaçament, pel mòdul d'aquest desplaçament [(*F* cos *a*) *ds*] o, bé el producte del mòdul de la força per la component del desplaçament segons la força [*F* (*ds* cos *a*)].

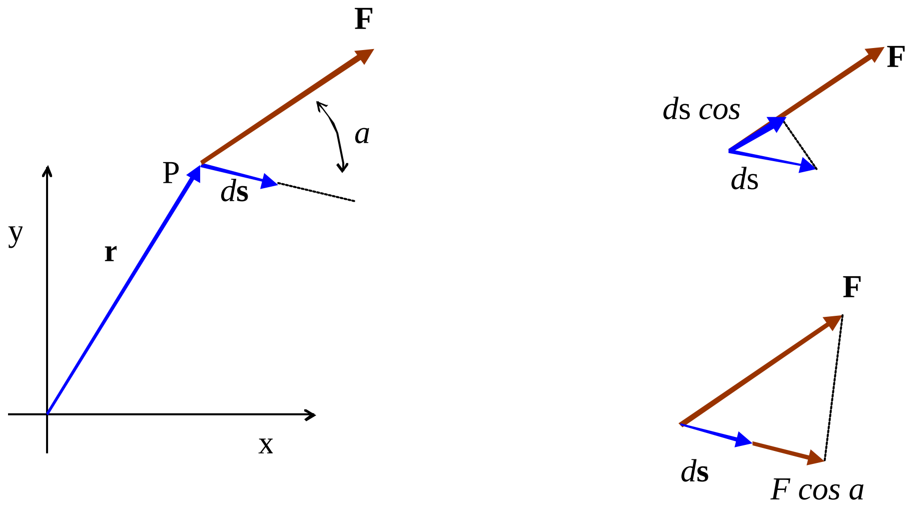


Figura 16. Treball d'una força

Com que la definició de treball indica que és el producte escalar de dos vectors, aquest serà una magnitud escalar que només tindrà valor absolut i signe algebraic. Quan siguin iguals el sentit del desplaçament i el component de la força segons el desplaçament (0 = a = 90º), el treball efectuat per la força serà positiu. Quan aquest desplaçament sigui oposat (90º = a = 180º), el treball efectuat per la força serà negatiu. Quan la direcció de la força i el desplaçament siguin perpendiculars el treball serà zero.

Com que el treball és, per definició, el producte d'una força per un desplaçament, les seves unitats seran unitat de força per unitat de longitud. En el SI la unitat de treball rep el nom de joule (1J = 1N · m).

Quan la força F que s'aplica sobre un punt material varia en mòdul i direcció, l'equació 28 només valdrà per una variació infinitesimal de posició. El treball total efectuat per la força quan el punt passa de la posició A fins la posició B s'obté integrant l'equació 28 al llarg del camí seguit pel punt material. Així,

$$U_A^B = \int_A^B dU = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos a \, ds \qquad \textbf{Equació 29}$$

En l'equació 29, *ds* és el mòdul del desplaçament infinitesimal *d***s** y *a* es l'angle que formen **F** i *d***s**. L'equació 29 es pot utilitzar per calcular el treball efectuat per una força qualsevol si es poden establir les relacions existents entre *F*, *a* i *s*. Com que el producte escalar de les magnituds vectorials **F** i *d***s** és una magnitud escalar, es podrà utilitzar una integració escalar ordinària per determinar el treball efectuat. A més a més, si damunt el punt o del cos s'apliquen varies forces, el treball total serà igual a la suma dels treballs realitzats per cadascuna de les forces.

El desenvolupament de les fórmules del treball d'una força F, per al cas que aquesta es mantingui constant en mòdul, direcció i sentit mentre passa del punt A fins al punt B, porta a afirmar que el treball U desenvolupat per aquest tipus de forces és independent del traçat de la corba, i només depèn de la posició del punt inicial i de la posició del punt final. És a dir, el treball efectuat per una força constant és el mateix per a qualsevol traçat i no depèn del recorregut, sinó de la magnitud de la distància *d* entre l'origen i el final del recorregut en la direcció de la força, tal com es pot veure en la figura 17. El treball efectuat per la força constant F serà el mateix tant si passa per un camí corbat com per un de rectilini.

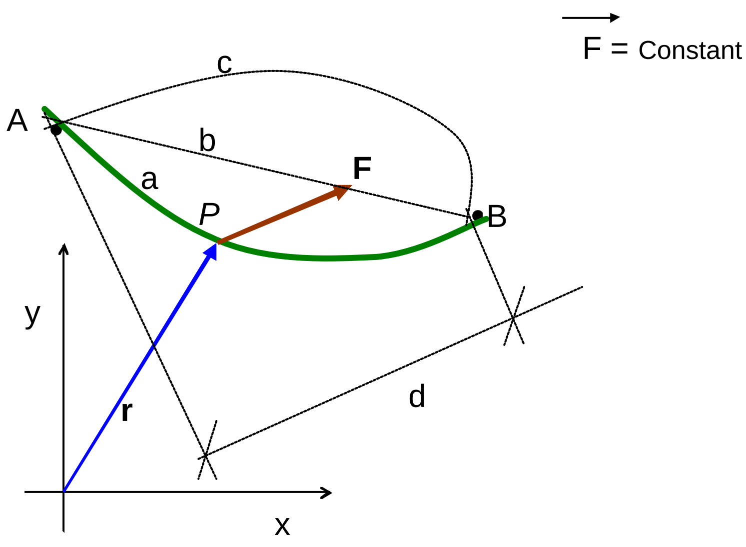


Figura 17. Treball independent de la corba per a forces F constants en mòdul, direcció i sentit

El fet que el treball d'una força constant no depengui del camí recorregut és útil per calcular el treball efectuat pel pes d'un cos, ja que el pes en la superfície de la Terra és un tipus d'aquestes forces constants en mòdul, direcció i sentit. Així, el seu treball serà simplement el producte del pes *W* del cos pel desplaçament vertical *h* del seu centre de gravetat. Si el desplaçament té lloc apropant-se al centre de la terra, en el mateix sentit de la força de la gravetat, el treball serà positiu. Si el desplaçament és en direcció oposada al centre de la terra, sentit oposat a la força de gravetat, el treball serà negatiu. Com exemple d'altres forces que efectuen un treball quan el cos es mou d'una posició a una altra a més del pes d'un cos, hi ha la força de fregament entre un cos i una superfície, o les forces a distància tipus electromagnètica. Com a exemples de forces que no realitzen cap treball hi ha les forces aplicades a punt fix o qualsevol força que és perpendicular al desplaçament del cos.

6.2.2- Treball d'un parell

El treball efectuat per una força **F** durant el desplaçament lineal infinitesimal *d***s** d'un punt es definia segons l'equació 28. El treball efectuat per un parell C, en girar un angle infinitesimal *d***?,** es pot obtenir aplicant l'equació 28 a les dues forces que formen el parell. Els desplaçaments angulars infinitesimals son magnituds vectorials, però no ho son els desplaçaments angulars finits. Per tant, s'haurà d'utilitzar desplaçaments angulars infinitesimals per determinar el treball en que hi intervinguin moviments angulars.

$$dU = F_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + F_2 \cdot d\mathbf{s}_2 \qquad \textbf{Equació 29}$$

Quan el parell giri un angle infinitesimal *d***?,** la força F_1 i F_2 experimenten desplaçaments lineals infinitesimals $d\mathbf{s}_1$ i $d\mathbf{s}_2$ en la direcció de la força, tal com sindica a la figura 18.

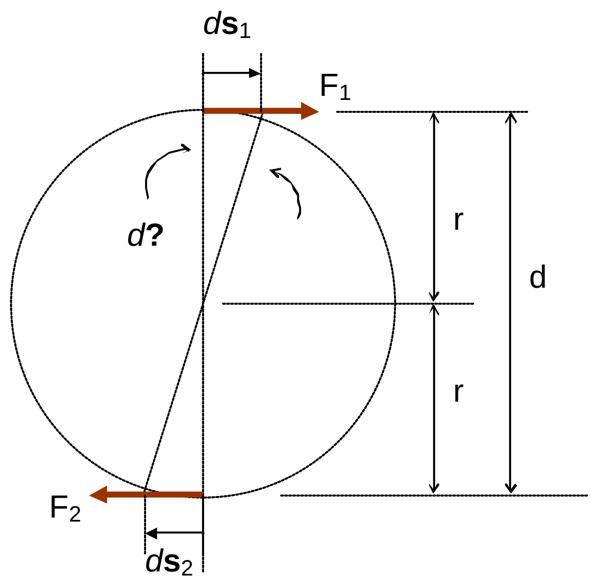


Figura 18. Treball d'un parell

Els mòduls dels desplaçaments són

$$ds_1 = ds_2 = r\ d? \qquad \textbf{Equació 30}$$

Com que les dues forces del parell tenen el mateix mòdul F, el treball efectuat per les forces serà

$$\begin{aligned} dU &= F_1 \cdot ds_1 + F_2 \cdot ds_2 \\ &= F\ (r\ d?) + F\ (r\ d?) \qquad \textbf{Equació 31} \\ &= F\ (2r)\ d? = F\ d\ d? = M\ d? \end{aligned}$$

on $M = F \cdot d$ és el moment del parell.

El treball efectuat en un desplaçament angular finit **?** es pot obtenir integrant l'equació 31. Així,

$$U = ?_0^{?} dU = ?_0^{?} M\ d? \qquad \textbf{Equació 32}$$

Si el moment M del parell és constant

$$U = ?_0^{?} M\ d? = M\ ?_0^{?} d? \qquad \textbf{Equació 33}$$

Si el cos està sotmès simultàniament a una translació lineal i a una rotació, el parell que s'exerceix al seu damunt només treballarà a causa de la rotació. El parell treballarà quan es gira un angle en el pla del parell (al voltant de l'eix del parell). El treball serà positiu si el desplaçament angular té el sentit de rotació del parell, i negatiu quan el desplaçament tingui el sentit oposat. No hi ha treball en una translació o si gira al voltant d'un eix paral·lel al del parell.

Si el cos gira a l'espai, es necessita la component del desplaçament angular infinitesimal *d?* segons la direcció del parell **C**. En aquest cas, el treball efectuat es determina per mitja del producte escalar:

$$dU = \mathbf{C} \cdot d? \quad \text{o sigui} \quad dU = \mathrm{M}\, d?\, \cos a \qquad \textbf{Equació 34}$$

on M és el mòdul del moment del parell, *d***?** és el mòdul del desplaçament angular infinitesimal i a és l'angle que formen **C** i *d***?.**

Com que el treball és una magnitud escalar, el treball que sobre un cos rígid efectua un sistema de forces i parells exteriors serà la suma dels treballs efectuats per les forces i els parells cadascun de forma individual.

6.2.3- Treball virtual

Quan un cos sobre el que s'exerceix una força pateix un desplaçament lineal infinitesimal com en el descrit anteriorment, aquest cos no està en equilibri. En estudiar l'equilibri d'un cos mitjançant el mètode dels treballs virtuals, és necessari introduir desplaçaments ficticis que se'ls anomena *desplaçaments virtuals*. Un desplaçament virtual infinitesimal es representa per la diferencial de primer ordre *d***s** en lloc de *d***s**[11]. El treball que realitza una força **F** que s'aplica sobre un cos durant un desplaçament virtual *d***s** rep el nom de treball virtual *dU* i es representa matemàticament de la forma

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{o sigui} \quad dU = \mathrm{F}\, ds\, \cos a \qquad \textbf{Equació 35}$$

On la *F* i *d*s son els mòduls de la força **F** i del desplaçament virtual *d***s** respectivament, i a es l'angle que format entre **F** i *d***s**.

[11] El terme *diferencial de primer ordre* és un terme matemàtic pur que substitueix un terme geomètric i físic pur. Tanmateix, els càlculs son els mateixos.

També pot ser desplaçament virtual la rotació d'un cos. El treball que realitza un parell **C** durant un desplaçament angular virtual infinitesimal d**?** és

$$dU = \mathbf{C} \cdot d\mathbf{?} \quad \text{o sigui} \quad dU = M\, d? \cos a \qquad \textbf{Equació 36}$$

On M i *d*? son els mòduls del parell C i del desplaçament virtual *d***?** respectivament, i a és l'angle que formen **C** i *d***?**. Els desplaçaments virtuals *d***?** i *d***s** de les dues equacions anteriors corresponen a moviments ficticis i, conseqüentment, aquestes equacions no es poden integrar.

6.3- PRINCIPI DEL TREBALL VIRTUAL I EQUILIBRI

Els conceptes bàsics definits anteriorment serveixen per presentar el mètode matemàtic que s'utilitzarà per trobar els resultats empírics associats al prototipus del treball. Aquest mètode, el principi dels treballs virtuals, es pot enunciar de la forma següent:

> Si el treball virtual efectuat per totes les forces (o parells) exteriors que s'apliquen a un punt, a un cos rígid, o a un sistema de cossos rígids connectats mitjançant connexions i recolzaments ideals (sense fregament), és nul per a tots els desplaçaments virtuals del sistema, llavors aquest estarà en equilibri.

El principi del treball virtual es pot expressar matemàticament de la següent manera:

$$dU = ? \; F_i \cdot d\mathbf{s}_i + ? \; C_j \cdot d\mathbf{?}_j = 0 \qquad \textbf{Equació 37}$$

on cadascun dels termes de l'equació representen els conceptes definits anteriorment de força, moment, desplaçament lineal i desplaçament angular.

6.3.1- Equilibri d'un punt i d'un cos rígid

El principi dels treballs virtuals es pot aplicar a qualsevol element físic. Si s'aplica a un punt només treballaran les forces que hi actuen directament sobre el mateix punt. Si s'aplica a un cos rígid, s'hauran de considerar també els treballs dels moments perquè poden haver-hi rotacions respecte d'eixos i, per tant, es crearan treballs de gir.

Consideri's el punt material representat per la figura 19 sobre el qual s'exerceixen diverses forces F_1, F_2, ... , F_n.

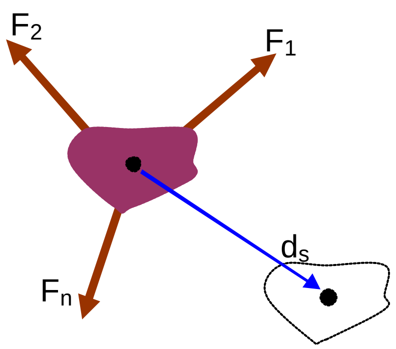


Figura 19. Punt sotmès a un sistema de forces

El treball que sobre el punt efectuen aquestes forces durant un desplaçament virtual arbitrari *d***s** és

$$dU = F_1 \cdot d\mathbf{s} + F_2 \cdot d\mathbf{s} + \ \ldots \ + F_n \cdot d\mathbf{s} =$$
$$= (F1 + F2 + \ldots + Fn) \cdot d\mathbf{s} =$$
$$? \ F \cdot d\mathbf{s} = R \cdot d\mathbf{s}$$

Equació 38

Quan un cos rígid està en equilibri, tots els punts que el constitueixen també ho hauran d'estar. Conseqüentment, segons el principi del treball virtual, el treball total de les forces, interiors i exteriors, que s'exerceixen sobre els distints punts, haurà de ser nul. Com que les forces interiors en els punts del cos s'exerceixen dos a dos i tenen la mateixa direcció i mòdul però el sentit oposat, el treball que cada parell d'elles efectua en un desplaçament virtual qualsevol del cos serà nul. Així, durant un desplaçament virtual qualsevol del cos, només les forces exteriors efectuaran treball. Tot sistema de forces que s'exerceix sobre un cos rígid pot substituir-se per una força resultant **R** i un parell resultant **C**. Així, el treball que sobre un cos rígid efectuen les forces exteriors durant un desplaçament virtual lineal *d***s** i un desplaçament virtual angular *d***?** arbitraris, serà el definit per l'equació següent:

$$dU = R \cdot d\mathbf{s} + C \cdot d\mathbf{?} = 0$$ **Equació 39**

Expressant la força resultant R, el parell resultant C i els desplaçaments virtuals $d\mathbf{s}$ i $d\mathbf{?}$ en forma vectorial cartesiana[12], efectuant els productes escalars segons els eixos x, y i z, i aplicant el principi dels treballs virtuals segons la l'equació 37, obtenim

$$\begin{gathered} dU = R \cdot d\mathbf{s} + C \cdot d\mathbf{?} = \\ ?\, F_x \cdot dx + ?\, F_y \cdot dy + ?\, F_z \cdot dz + \\ ?\, M_x \cdot d?_x + ?\, M_y \cdot d?_y + ?\, M_z \cdot d?_z = 0 \end{gathered}$$ **Equació 40**

I considerant un per un els desplaçaments virtuals lineals (dx, dy i dz) i els desplaçaments virtuals angulars ($d?_x$, $d?_y$ i $d?_z$) obtenim

$$?\ F_x - \ 0 \qquad ?\ F_y = \ 0 \qquad ?\ F_z = \ 0$$

$$?\ M_x - \ 0 \qquad ?\ M_y - \ 0 \qquad ?\ M_z - \ 0$$

Conseqüentment, ens adonem que l'equació dels treballs virtuals $dU = 0$ no és sinó una altra forma d'enunciar les equacions d'equilibri d'un cos rígid. El principi dels treballs virtuals no simplifica la solució dels problemes referents a l'equilibri d'un cos rígid únic ja que l'equació $dU = 0$ és equivalent a les equacions d'equilibri $?\ F = 0$ i $?\ M = 0$.

6.3.2- Equilibri d'un sistema ideal de cossos rígids interconnectats

El principi dels treballs virtuals pot també utilitzar-se per estudiar sistemes de cossos rígids interconnectats. Freqüentment, molts problemes es poden resoldre utilitzant el sistema complert que es desitja analitzar enlloc d'analitzar-los mitjançant els diagrames independents de sòlid lliure dels diversos membres del sistema.

[12] L'expressió cartesiana de vectors és la que es coneix mitjançant els eixos x, y i z. Tanmateix, si s'esmenta el terme de *coordenades cartesianes* és perquè hi ha d'altres formes de representar punts a l'espai com les coordenades cilíndriques o les coordenades esfèriques, conceptes que es donen a nivell de les carreres universitàries.

Quan el sistema segueix connectat durant el desplaçament virtual, només serà necessari considerar el treball de les forces exteriors al sistema, donat que el treball total efectuat per les forces internes en les interconnexions dels membres, durant un desplaçament virtual qualsevol, serà nul donat que les forces es contraresten dues a duess. Aquesta condició existeix, per exemple, quan la connexió és un passador llis, un rodet llis o una barra o un cable inextensibles. De fet, el mateix disseny del model experimental del treball és un sistema de cossos interconnectats que aprofita, a més, aquesta circumstància de poder treballar amb cables inextensibles[13].

6.4- ENERGIA POTENCIAL I EQUILIBRI

L'energia potencial d'un cos constitueix una mesura de la seva capacitat de fer treball. L'energia potencial es podria definir quantitativament com la quantitat de treball que el cos es capaç de fer contra forces exteriors en passar d'una posició a una altra. Una molla comprimida és capaç de fer un treball en virtut de les posicions relatives (configuració) de les seves partícules. L'energia potencial s'expressa en les mateixes unitats que el treball, és a dir, en jouls (J) utilitzant el sistema internacional SI.

6.4.1- Sistema de forces conservatives

Quan el treball efectuat per un cos només depèn de la configuració (posició) inicial i final i no del camí que ha recorregut en passar de l'estat inicial al final, llavors es parla d'un sistema de forces conservatives. Aquests sistemes es troben freqüentment en el camp de l'enginyeria. Un exemple comú és el sistema constituït per la Terra i un cos elevat, sigui aquest rígid o deformable. El treball efectuat sobre el cos durant un desplaçament qualsevol és igual al producte de la força d'atracció que la Terra exerceix sobre el cos (pes), pel desplaçament vertical del centre de gravetat d'aquest. Les posicions intermitges que ocupa el cos en passar de la seva posició inicial a la final no tenen cap efecte sobre el treball total que s'efectua sobre el cos. Un altre exemple d'aquest tipus el podem trobar en un cos elàstic tal com una molla. Si el cos és elàstic, l'energia que té en un estat de deformació donat (configuració donada de les partícules) és independent dels moviments que s'hagin fet per portar el cos fins a l'esmentat estat de deformació. En qualsevol cas, la configuració de referència es pot escollir arbitràriament però, per conveniència, la posició inicial acostuma a ser tal que l'energia potencial sigui positiva o zero. Així, en el

[13] S'entén que es treballa teòricament amb cables inextensibles, malgrat tots els elements es deformen.

cas de la Terra i d'un cos elevat, es considera fixa la Terra i es pren com a configuració de referència, el punt (origen) on el cos està amb contacte amb la Terra.

D'altra banda, hi ha sistemes de forces no conservatives. El cas més comú de forces no conservatives és quan un cos treballa contra forces de fregament, donat que es produeix una pèrdua d'energia en forma de calor. Tot cos rígid sotmès a l'acció d'un sistema de forces en les que no hi hagi forces de fregament o pèrdues per calor, o que aquestes siguin menyspreables, serà un sistema conservatiu mentre no es produeixi cap canvi d'estat o condició del cos excepte el canvi de posició o configuració.

6.4.2- Energia potencial elàstica

Un cos deformable que canvia de forma en sotmetre'l a càrregues però que en deixar d'aplicar aquestes el cos torna a la seva forma original, es diu que és un cos elàstic. La molla de la figura 20 representa un exemple de cos elàstic que s'utilitza en moltes aplicacions tècniques.

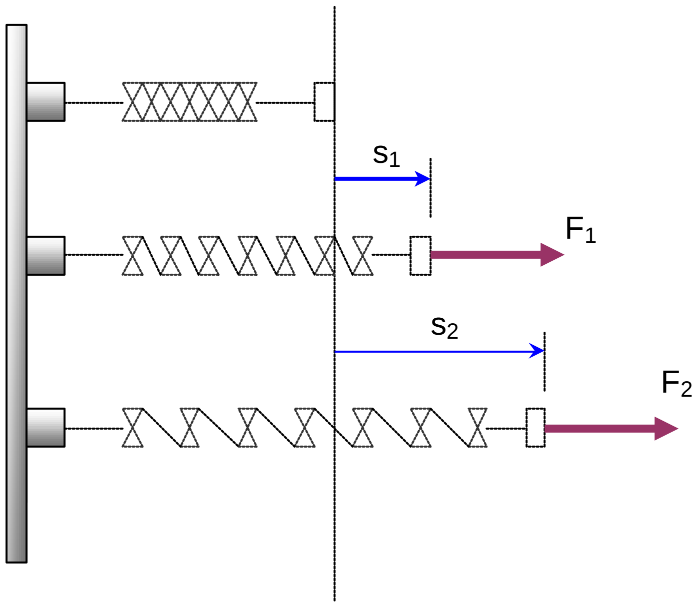


Figura 20. Molla elàstica sotmesa a forces

Quan s'aplica una força de tracció a una molla, aquesta s'allarga. Anàlogament, quan s'aplica a una molla una força de compressió, la seva longitud disminueix. El mòdul *F* de la força que s'ha d'aplicar a la molla per deformar-la una longitud *s* ve donada per l'expressió següent:

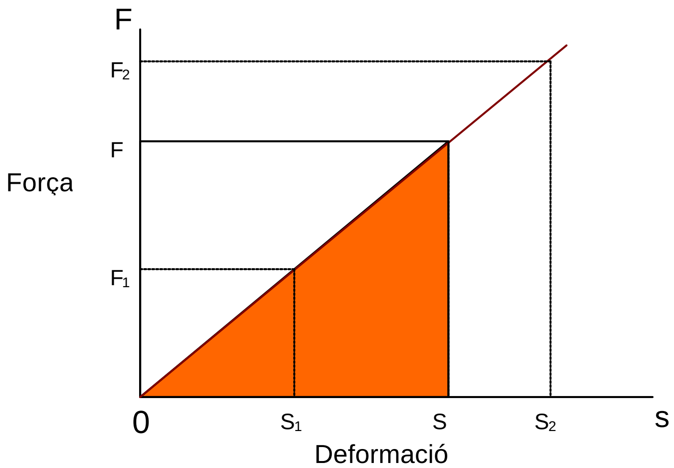
$$F = k\,s \qquad \textbf{Equació 41}$$

on *s* és la deformació de la molla respecte del punt inicial en absència de càrrega i *k* és la constant anomenada constant elàstica, o de rigidesa, de la molla. Qualsevol molla el comportament de la qual vingui determinat per l'equació anterior s'anomena molla elàstica lineal ideal.

El treball efectuat en estirar una molla ideal des de la seva posició inicial, sense deformació, fins a una posició deformada *s* es pot determinar a partir de l'equacio 28. Com que la força *F* i el desplaçament *s* tenen la mateixa direcció, l'angle a és nul i per tant l'equació 28 esdevé

$$U = \int_0^s k\,s\,ds = \frac{1}{2}\,k\,s^2 \qquad \textbf{Equació 42}$$

En aquest cas, el treball efectuat per la força F quan s'estira la molla es pot representar per l'àrea triangular ombrejada, sota la corba representativa de la relació entre la força (eix de les y) i el desplaçament (eix de les x), tal com s'il·lustra en el gràfic 3. Aquesta àrea també representa l'energia potencial elàstica V_e emmagatzemada en la molla a causa del canvi de forma d'aquesta.



Gràfic 3. Treball realitzat per una força a una molla elàstica

L'equació 41 només és vàlida si la deformació de la molla es calcula des de la posició natural sense esforç, és a dir, sense deformació. Tanmateix, i anàlogament, es podrà determinar, a partir de l'equació 28, el treball efectuat en estirar una molla ideal des de una posició inicial s_1 fins a una altra posició s_2, adaptant els extrems d'integració. Així,

$$U = V_e = ?_{s_2}^{s_1} k\ s\ ds = \frac{1}{2}\ k\ (s_2^2 - s_1^2) \qquad \textbf{Equació 43}$$

Quan es deforma una molla, estirant-la o comprimint-la, la força que se li aplica i el desplaçament que sofreix tenen el mateix sentit. Conseqüentment, el treball sobre la molla serà positiu, cosa que fa augmentar la seva energia potencial. Si la molla està deformada inicialment i es va reduint gradualment la seva deformació, força i desplaçament tindran sentits oposats, el treball serà negatiu i l'energia potencial es reduirà. La força que una molla realitza sobre un cos té el sentit oposat a la força que realitza el cos sobre la molla. Com que el cos i l'extrem de la molla en contacte amb ell pateixen el mateix desplaçament, el treball que la molla efectua sobre el cos dóna lloc a una disminució de l'energia potencial de la molla del mateix valor quantitatiu.

Paral·lelament, la molla en espiral que s'utilitza per resistir una rotació en lloc d'un desplaçament lineal, pot, també, contenir i despendre energia potencial. El mòdul T del moment torsor[14] que s'ha d'aplicar a un ressort en espiral per originar una rotació ? ve donat per l'expressió

$$T = k\ ? \qquad \textbf{Equació 44}$$

on T és el moment, ? és la deformació angular de la molla a partir de la seva posició natural i k és la constant elàstica de la molla. El treball U que realitza el moment T, que és igual a la energia potencial V_e, ve donat per l'expressió

$$U = V_e = ?_{0}^{?} T\ d? = ?_{0}^{?} k\ ?\ d? = \frac{1}{2}\ k\ ?^2 \qquad \textbf{Equació 45}$$

[14] El moment torsor és un tipus de moment que es caracteritza per ser paral·lel a l'eix de la peça.

que és formalment igual a l'expressió corresponent a la molla lineal.

Paral·lelament, durant un desplaçament virtual *ds* d'una molla, el treball virtual *dU* que es realitza sobre la molla i la variació d'energia potencial elàstica virtual de la molla venen donats per l'expressió següent:

$$dU = dV_e = \mathrm{F}\, d\mathrm{s} = \mathrm{k\, s}\, d\mathrm{s} \qquad \textbf{Equació 46}$$

6.4.3- Energia potencial gravitatòria

El treball que efectua el pes *W* d'un cos s'obté multiplicant aquest pes pel desplaçament vertical *dh* del seu centre de gravetat. Així,

$$U = \mathrm{W}\, dh \qquad \textbf{Equació 47}$$

Si el desplaçament té lloc cap al centre de la Terra, el treball és positiu; si ho fa en sentit oposat, és negatiu. El treball és independent del camí que segueix el cos en anar de la seva posició inicial a la seva posició final; només depèn del desplaçament vertical *h* del centre de gravetat del cos. Així,

$$U = V_g = ?_{0}^{h} W\ dh = W h = m\, g\, h \qquad \textbf{Equació 48}$$

L'energia potencial gravitatoria que té el cos, pot efectuar treball en passar aquest a una posició inferior. El treball que efectua el pes *W* en desplaçar-se cap avall és positiu. Aquest moviment cap avall donarà lloc al fet que l'energia potencial disminueixi una quantitat igual al treball efectuat. Així,

$$?U = W\, ?h = -?V_g \qquad \textbf{Equació 49}$$

Durant un desplaçament virtual *dh* del cos, el treball virtual *dU* que efectua el pes del cos i la variació virtual d'energia potencial gravitatòria dV_e del cos venen donats per l'expressió de l'equació 50, que es mostra a continuació.

$$dU = -dV_g = W\,dh \qquad \textbf{Equació 50}$$

6.5- PRINCIPI DE L'ENERGIA POTENCIAL

Com que el treball que efectua una molla lineal sobre un cos és igual a la variació, canviada de signe, de l'energia potencial elàstica de la molla, i el treball que efectua un pes W és igual a la variació, canviada de signe, de l'energia potencial de gravitació, l'equació del treball virtual d'un cos sotmès a tot tipus de forces es podrà expressar de la forma següent:

$$dU + dV_e + dV_g = dU + dV = 0 \quad \text{o sigui} \quad dU = -dV \qquad \textbf{Equació 51}$$

on $V = V_e + V_g$ representa l'energia potencial total del sistema i *dU* el treball virtual realitzat sobre el sistema durant un desplaçament virtual per totes les forces exteriors, entre les que no es troben ni les forces elàstiques ni les forces de gravitació. Així, podem enunciar el principi del treball virtual de la següent forma:

> un sistema es troba en equilibri si el treball virtual que sobre el sistema efectuen les forces exteriors es igual a la variació d'energia potencial elàstica i de gravetat del sistema per a tots els desplaçaments virtuals possibles.

El model experimental del treball aprofita tots els conceptes anteriors, i s'ha desenvolupat pensant que tots els desplaçaments virtuals es poden expressar en funció d'una sola variable (desplaçament) independent. Quan la posició d'un sistema pot definir-se mitjançant una sola variable (s), pot escriure's en termes diferencials de la forma següent:

$$V = V(s) \qquad \text{ó} \qquad dV = \frac{dV}{ds}\,ds \qquad \textbf{Equació 52}$$

Com que els desplaçaments son no nuls, $ds \neq 0$, el principi del treball virtual per a l'equilibri del sistema, representat per l'equació anterior, dóna

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

Equació 53

Així, doncs, la formulació del principi dels treballs virtuals es formula com que la derivada, respecte de la variable de posició, de l'energia potencial d'un sistema conservatiu en equilibri és nul·la. És a partir d'aquesta propietat que es pren el nom de principi de l'energia potencial. Quan la posició d'un sistema pot descriure's mitjançant una sola variable, es diu que el sistema té un grau de llibertat. Tanmateix, si la posició del sistema depèn de varies variables independents, l'energia potencial emmagatzemada en el sistema serà funció d'n variables independents, que donaran lloc a un sistema d'equacions diferencials, que seran l'expressió matemàtica del principi de l'energia potencial per al mateix sistema.

El principi de l'energia potencial s'utilitza per determinar la posició d'equilibri d'un cos o sistema de cossos, però es pot utilitzar també per determinar quin tipus d'equilibri té el mateix sistema, quin és el seu estat d'equilibri. Per estat d'equilibri s'entén la situació estable o inestable que caracteritza la posició del sistema després d'haver efectuat un treball per la incorporació de forces o moments al sistema. Un sistema determinat es diu que és inestable quan qualsevol petita pertorbació per l'acció afegida d'alguna força o d'algun moment no porta a l'equilibri sinó que el sistema es modifica totalment, inclosa la posició de tots els seus elements o parts constituents. Un sistema estable és tot el contrari, tot resultant que la configuració d'equilibri estable té lloc en un punt d'energia potencial mínima. Matemàticament, per a un sistema d'un grau de llibertat, l'energia potencial serà mínima quan la segona derivada de l'energia potencial respecte de la variable del desplaçament sigui positiva. Així doncs, per a l'equilibri estable

$$\frac{dV}{ds} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2V}{ds^2} > 0$$

Equació 54

Quan el sistema estigui caracteritzat per varis graus de llibertat, l'energia potencial V dependrà de varies variables i, per determinar si V es mínima serà necessari un tractament més avançat que determini quan V és mínima. L'anàlisi i els criteris d'estabilitat per a sistemes de diversos graus de llibertat correspon a matèries de nivell universitari. El model objecte d'aquesta treball correspon a l'àmbit dels problemes d'una sola variable i, conseqüentment, el nivell exigit per a resoldre'l matemàticament correspon al contingut que es dóna en el batxillerat.

6.6- EL MODEL EXPERIMENTAL

Per tal de poder il·lustrar el concepte d'elasticitat dels materials, s'ha desenvolupat un model que té per objecte trobar els valors *k* de diferents ressorts o molles, que s'han obtingut de diferents indústries de Catalunya i que els utilitzen tant per als seus processos productius com per als seus productes finals. La raó principal de que el model experimental faci servir molles i no materials genèrics, és que l'alternativa de trobar directament els valors als paràmetres relacionats amb l'elasticitat dels materials és una tasca que només poden fer els laboratoris professionals, ja que es necessiten de màquines molt cares i molt complexes. Una altra raó molt important és que, a més, s'aprofita la facilitat del càlcul matemàtic de tota la teoria de sistemes de forces conservatives i principi del treball virtual. De fet, l'ús del principi dels treballs virtuals respon a aquesta facilitat per il·lustrar de forma senzilla i entenedora el concepte d'elasticitat i la clara relació entre força i deformació. El mateix model il·lustra, clarament, com hi ha una relació precisa entre les deformacions dels materials i les forces que se'ls hi apliquen. El model experimental treballa només amb una variable independent perquè el plantejament matemàtic, i els càlculs associats, seria molt més complex si es prenguessin dues o més variables.

6.6.1- El prototipus

El model experimental consisteix en un prototipus d'alumini i acer tipus balança, que uneix una massa i una molla-ressort, que van canviant de posició i de longitud respectivament. La massa i el ressort estan units per un cable inextensible i una palanca que gira al voltant d'un passador que està exempt de fregament i situat en un recolzament, segons es mostra en la fotografia-figura 21. L'objectiu d'aquest model consisteix a relacionar els valors de l'angle de gir *?* de la palanca i els valors de la constant de la molla *k*, és a dir, esforços i deformacions. La forma empírica de procedir es fa mitjançant la disposició de diferents pesos per a una molla determinada i mesurant els diferents angles obtinguts.

Figura 21. Fotografia del prototipus

El procediment per relacionar els valors de ***k*** amb els valors de ***?*** es establint una relació geomètrica i introduir-la en les equacions de l'energia del mètode dels treballs virtuals. Aquesta relació geomètrica s'il·lustra en la figura 22.

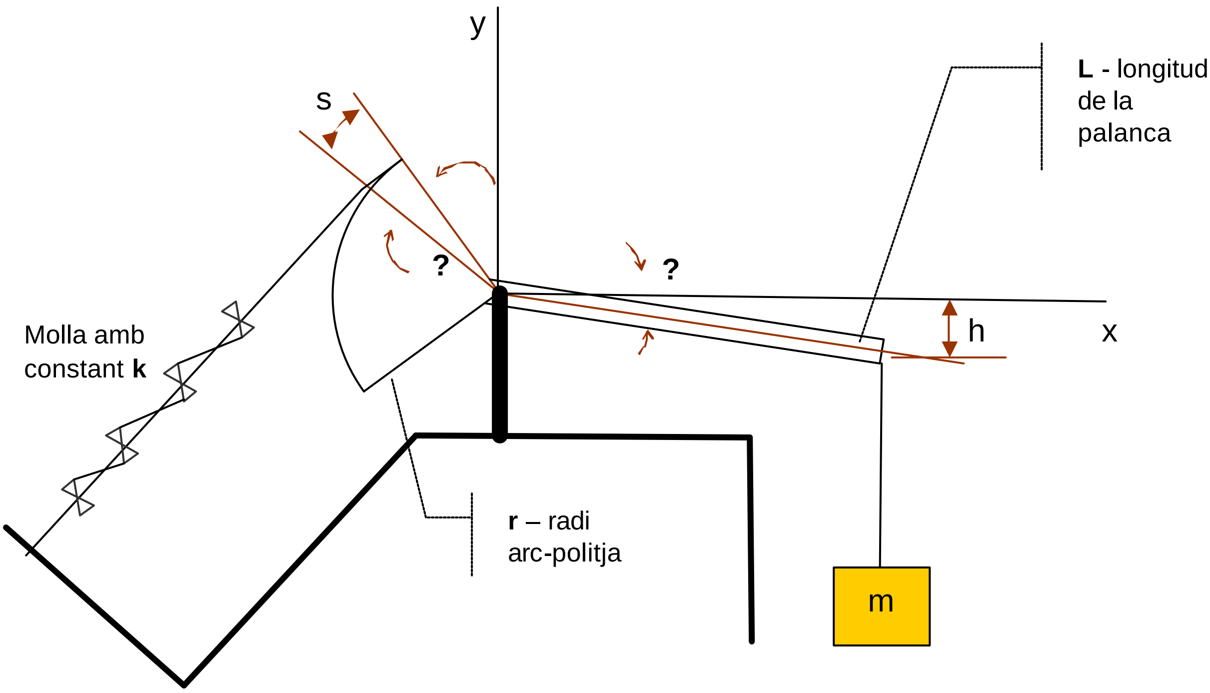


Figura 22. Relació geomètrica del prototipus per relacionar *k* i *?*

El ressort no està deformat quan ? = 0º. El valor *k* final característic de la molla es calcularà a partir de fer la mitjana dels diversos valors obtinguts en el procediment empíric. Així, si desenvolupem el principi de l'energia potencial, obtenim que les energies potencials de la massa, del ressort i el sistema respecte d'un sistema de referència en ? = 0º son:

$$V_m = m\,g\,(-h) = m\,g\,(-L \sin ?) = -\,m\,g\,L \sin ? \qquad \textbf{Equació 55}$$

$$V_e = \frac{1}{2}\,k\,s^2 = \frac{1}{2}\,k\,(r\,?)^2 = \frac{1}{2}\,k\,r^2\,?^2 \qquad \textbf{Equació 56}$$

$$V_{sist} = -\,m\,g\,L \sin ? + \frac{1}{2}\,k\,r^2\,?^2 \qquad \textbf{Equació 57}$$

Per trobar la relació d'equilibri hem de fer la derivada respecte de ? i igualar el resultat a zero.

$$\frac{dV_{sist}}{d?} = -\,m\,g\,L \cos ? + k\,r^2\,? = 0 \qquad \textbf{Equació 58}$$

Una vegada tenim aquesta equació i volem obtenir la relació entre l'angle ? i el valor de la constant *k* de la molla, aïllem *k* i obtenim

$$k = \frac{m\,g\,L}{r^2} \cdot \frac{\cos ?}{?} \qquad \textbf{Equació 59}$$

on *m*, *g*, *L* i *r* son variables geomètriques i físiques donades.

Aquesta equació és explícita en el paràmetre *k* i, per tant, obtenir els seus valors empírics de cadascuna de les molles és de procediment directe per substitució. La derivada segona de l'energia potencial del sistema V_{sist}, dóna sempre valors positius per a qualsevol valor de ?. Conseqüentment, l'equilibri serà estable.

6.7- DISCUSIÓ DE RESULTATS

Tal com es podrà observar en l'annex, on es mostra amb més detall els resultats obtinguts, en mesurar les deformacions de les diferents molles s'ha observat que com més gran és el pes més gran es l'angle girat i, per tant, més gran és la deformació de la molla. Aquest fet remarca la meva hipòtesi de partida, que com més força s'aplica a un cos més gran serà la seva deformació.

Per tal d'obtenir uns resultats raonablement precisos, per trobar la constant elàstica de cada molla s'han pres les mesures amb varis pesos i tot seguit s'ha fet la mitjana de les deformacions obtingudes. Les molles que s'han utilitzat per a la part empírica s'han escollit en grups de dos tenint la característica de ser iguals en el tipus d'acer i en el disseny. Els valors k obtinguts han mostrat gran coherència, sobretot pel fet que no hi ha hagut dispersió en els resultats, i podent-se afirmar que el prototipus ha treballat de forma raonable en termes de precisió.

En la taula següent s'exposen els resultats del valors *k* de cadascuna de les molles que s'han utilitzat per al treball, tot fent servir la fórmula anterior. Els valors dels càlculs s'exposen més a bastament en l'annex.

Molla	**Ressort *k* (kN/m)**
1A	**4.9**
1B	**4.8**
2A	**2.9**
2B	**2.8**
3A	**61**
3B	**59**
4A	**6.6**
4B	**7.5**

CONCLUSIONS

L'elasticitat és una propietat dels materials que passa sovint molt desapercebuda. Amb el desenvolupament del prototipus ha estat molt interessant comprovar la llei de Hooke i la seva afirmació "uc tensio sic vis" (així com és l'estirament és la força)[15]. Els resultats empírics han demostrat que hi ha una relació directa i proporcional entre força i deformació.

L'estudi teòric d'aquesta propietat m'ha fet veure la dificultat que suposa el coneixement de les deformacions dels materials, i de com els tècnics que la fan servir han de ser persones que han d'estudiar molt per solucionar els problemes de la societat on vivim, sigui per fer coses per a la casa com portes, sofàs o matalassos, o coses molt més complexes com cotxes, ponts o màquines per a la indústria. Tanmateix, la part teòrica m'ha ensenyat nous coneixements, però no ha estat cap novetat com a tipus de treball, simplement mes extens.

Per altra banda, a part d'aquests nous coneixements adquirits en la part mes teòrica, la part practica del treball, la de mesurar les deformacions de les molles, m'ha fet entendre la dificultat del treball empíric. M'he adonat que treballar fent experimentació calen certes actituds i valors com la precisió, la constància i, sobretot, la paciència; tots ells son de vital importància per assegurar uns bons resultats i un treball professional.

De la part empírica, n'he quedat bastant satisfet dels resultats obtinguts i del bon funcionament que ha tingut l'aparell construït. Inicialment tenia por de que el projecte no es pogués realitzar físicament o que els resultats que acabés obtenint no fossin coherents. Però tots els resultats han seguit, uns mes que d'altres, les lleis de la física. Abans de començar la part empírica i calcular la deformació de les molles, vaig proposar-me la hipòtesi, que es va verificar posteriorment, de que, com més gran fos el esforç mes gran seria la deformació i que una molla o una material qualsevol per molt rígid que sembli sempre pateix una deformació.

[15] Riley et al.: 2001, 143

En el meu cas m'ha estat mol mes fàcil comprovar la deformació de molles mes aviat "toves" que no pas la de les molles "dures". Bàsicament per dos motius: el primer era perquè amb les molles dures havia d'utilitzar pesos força grans dels quals no disposava. El segon motiu era que, la deformació que patia una molla d'aquest últim tipus era més difícil d'apreciar i per tant més difícil de mesurar.

Els principals problemes pràctics amb els que em vaig trobar va ser de dos tipus. El primer ha estat que el cable que uneix la molla amb l'element palanca havia de ser al més lleuger possible i ha hagut de ser finalment de nylon, perquè si era d'altres materials, el seu propi pes deformava la línia de la molla. El segon problema ha estat que un cop ficat el pes i que la molla patis una deformació, havia d'esperar a que no hi hagués cap tipus de moviment oscil·latori, és a dir, havia d'esperar a arribar a una posició estable. Aquest moviment és força comú en les molles. Aprofito per dir que també, mitjançant l'estudi d'aquest fenomen i de les formules del moviment harmònic simple també s'hagués pogut trobar el valor de la constant elàstica d'una molla.

Finalment esmentar que en l'edició del treball he necessitat de millorar el meu coneixement de l'editor de textos Word, per tal de poder oferir uns esquemes i unes il·lustracions el suficientment aclaridors respecte de la teoria que s'exposava.

BIBLIOGRAFIA

Riley, W. et Sturges, L. (1995). **Ingenieria Mecánica. Estatica**. Barcelona: Editorial Reverté.

Riley, W., Sturges, L. et Morris, D. (2001). **Mecánica de Materiales**. México, D.F.: Editorial Limusa Wiley.

Aquest annex mostra els resultats empírics de 8 molles de 4 tipus d'acer diferents. Per a determinar els seus valors, s'han substituït en l'equació derivada de l'energia potencial del sistema,

$$k = \frac{m\ g\ L}{r^2} \cdot \frac{\cos ?}{?}$$

els valors reals de la gravetat i de les dimensions del prototipus, juntament amb les masses.

L = 0,160 m
r = 0,100 m
g = 9,807 m/s^2
m = 0,010 ? 0,700 Kg.

Obtenint-se la fórmula definitiva

$$k = 156,912 \cdot m\ (\text{kg.}) \cdot \frac{\cos ?\ (\text{rad.})}{?\ (\text{rad.})}$$

En les taules següents s'exposen els valors que s'han utilitzat per fer les mitjanes de les relacions entre els pesos que s'han utilitzat i els angles obtinguts en el procés d'experimentació i utilització del model per al càlcul dels valors de les constants **k** de les molles que s'han fer servir per a el treball. Les molles es troben en un annex que també forma part d'aquesta treball.

Molla 1A			
Pes (kg.)	**Angle ? Graus / Radians**		**Ressort k (kN/m)**
0,020	33.0	0.575958653	4.86
0,030	38.5	0.671951762	4.85
0,040	48.5	0.846484687	4.85
0,050	53.0	0.925024503	4.86
0,060	57.5	1.00356432	4.86
Mitjana Ressort *k* (Kn/m)		**4.86**	

Molla 1B			
Pes (kg.)	**Angle ? Graus / Radians**		**Ressort k (kN/m)**
0,020	34.5	0.602138591	4.84
0,030	39.5	0.689405054	4.83
0,040	49.0	0.855211333	4.84
0,050	54.0	0.942477796	4.84
0,060	58.5	1.021017612	4.84
Mitjana Ressort *k* (Kn/m)		**4.84**	

Molla 2A			
Pes (kg.)	**Angle ? Graus / Radians**		**Ressort k (kN/m)**
0,010	28.5	0.497418836	2.88
0,020	44.5	0.776671517	2.88
0,030	54.5	0.951204442	2.88
0,040	67.5	1.178097245	2.87
Mitjana Ressort *k* (Kn/m)		**2.88**	

Molla 2B			
Pes (kg.)	**Angle ? Graus / Radians**		**Ressort k (kN/m)**
0,010	30.0	0.523598775	2.76
0,020	46.5	0.811578102	2.77
0,030	56.0	0.977384381	2.77
0,040	68.5	1.195550538	2.77
Mitjana Ressort *k* (Kn/m)		**2.77**	

Molla 3A			
Pes (kg.)	**Angle ? Graus / Radians**		**Ressort k (kN/m)**
0,400	42.5	0.741764932	61.5
0,500	48.5	0.846484687	61.3
0,600	53.5	0.933751149	61.9
0,700	57.5	1.00356432	60.8
Mitjana Ressort *k* (Kn/m)		**61.4**	

Molla 3B			
Pes (kg.)	**Angle ? Graus / Radians**		**Ressort k (kN/m)**
0,400	44.0	0.767944870	59.0
0,500	49.5	0.863937979	59.1
0,600	55.0	0.959931088	58.9
0,700	58.5	1.021017612	59.3
Mitjana Ressort *k* (Kn/m)		**59.0**	

Molla 4A			
Pes (kg.)	**Angle ? Graus / Radians**		**Ressort k (kN/m)**
0,020	24.0	0.41887902	6.61
0,040	41.0	0.715584993	6.62
0,060	51.0	0.890117918	6.58
0,080	57.0	0.994837673	6.62
Mitjana Ressort *k* (Kn/m)		**6.61**	

Molla 4B			
Pes (kg.)	**Angle ? Graus / Radians**		**Ressort k (kN/m)**
0,020	22.5	0.392699081	7.52
0,040	38.5	0.671951762	7.43
0,060	49.5	0.863937979	7.47
0,080	55.0	0.959931088	7.48
Mitjana Ressort *k* (Kn/m)		**7.48**	